Escuela de Matemática

Instituto Tecnológico de Costa Rica

Plantilla

Ejercicios co respuesta

Selección de ejercicios con respuestas

II Semestre, 2018

Las aplicaciones interactivas requieren haber instalado la aplicación gratuita Wolfram CDFPlayer

Wolfram CDF Player

https://www.wolfram.com/cdf-player/

Revista

Matemática, Educación e Internet. (https://tecdigital.tec.ac.cr/revistamatematica/).

Índice general

1 **Uso de la plantilla** — **Página 3**

2 **Ejemplo: Preliminares: Los números reales** — **Página 5**
2.1 Ejercicios 8
2.2 Solución de los ejercicios del capítulo 1 10

3 **Ejemplo: Límite de una función: Definición formal** — **Página 11**
3.1 Ejercicios 15
3.2 Solución de los ejercicios del capítulo 2 16

Bibliografía — **Página 21**

Ejercicios y su solución. Puede habiltar la solución de los ejercicios en cualquier lugar del documento. Solo requiere agregar `\soluciones` y `\solucionesCap{xx}` como se indica más abajo. También puede agregar las soluciones al final del libro como se indica al final de este archivo .tex

Créditos - Ver términos de licencia en esta misma carpeta

Esta práctica: "Práctica del curso de Cálculo (para computación)" es el resultado de la selección de ejercicios de los libros y las prácticas consignadas en la bibliografía. En la elaboración de este material participaron los siguientes profesores:

Walter Mora F. Coordinador

Este material se distribuye bajo licencia Craetive Commons "Atribución-NoComercial-SinDerivadas 4.0 Internacional" (CC BY-NC-ND 4.0) (ver; https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/deed.es)

Citar como:

W. Mora et al. "Práctica del curso de Cálculo (para computación). Selección de ejercicios." Revista digital, Matemática, Educación e Internet.
https://tecdigital.tec.ac.cr/revistamatematica/Libros/practicas/

Capítulo 1

Uso de la plantilla

Los ejercicios, con o si respuesta, se pueden agregar en cualquier lugar del documento. Tienen asociado el número de capítulo y cada sección.

Cada ejercicio se introduce con el comando

```
\exersol{
Pregunta
}{
respuesta
}
%
```

Listas de ejercicios más grandes se pueden introducir con

```
\begin{ejer}
%\begin{multicols}{2}
\bex
\itemps{ Pregunta
}{
respuesta
}
%
\itemps{ Pregunta
}{
respuesta
}
%
\itemps{ Pregunta
}{
respuesta
}
%
.
.
.
\eex
%\end{multicols}
\end{ejer}
```

Puede habiltar la solución de los ejercicios en cualquier lugar del documento. Solo requiere agregar `\soluciones` y `\solucionesCap{xx}` como se indica más abajo.

También puede agregar las soluciones al final del libro como se indica al final de este archivo .tex

En el archivo de diseño puede cambiar las imágenes y los ambientes `\multicols`

```
%\chapter{Soluci\'on de los ejercicios}
\soluciones       % Obligatorio
\solucionesCap{1}
\solucionesCap{2}
...
```

Por lo demás, el archivo de diseño permite editar este documento como un libro, como se muestra en los capítulos de ejemplo.

Capítulo 2

Ejemplo: Preliminares: Los números reales

En este resumen, vamos a presentar algunas propiedades de los números reales que serán muy útiles para describir el comportamiento de las funciones. Las demsotraciones formales usualmente usarán estas propiedades. Aunque los números reales se pueden presentar como una construcción desde los números naturales, aquí el enfoque es axiomático: Asumimos la existencia de $\mathbb{R}$ y postulamos las propiedades que lo caracterizan.

Axioma (del buen ordenamiento de $\mathbb{N}$)

Si S es un subconjunto no vacío de $\mathbb{N}$, entonces existe $m \in S$ tal que $m \leq k$ para todo $k \in S$

Teorema 2.1 (Principio de Inducción)

Sea $m \in \mathbb{N}$. Si $P(n)$ es una proposición para cada $n \geq m$, entonces $P(n)$ es verdadera para todo $n \geq m$ si se cumplen las dos condiciones siguientes

a.) $P(m)$ es verdadero

b.) para cada $k \geq m$, si $P(k)$ es verdadera, entonces $P(k+1)$ es verdadera.

Axiomas de campo. El conjunto de los números reales se puede describir como un conjunto "completo y ordenado". Asumimos la existencia de un conjunto $\mathbb{R}$ con dos operaciones "$+$" y "$\cdot$" llamadas adicoón y multiplicación, respectivamente, tal que cumplen las siguientes propiedades (de campo):

a.) $\forall\ x,y \in \mathbb{R},\ x+y \in \mathbb{R}$ y, si $x = w$ y $y = z$, entonces $x+y = w+z$.

b.) $\forall\ x,y \in \mathbb{R},\ x+y = y+x$

c.) $\forall\ x,y,z \in \mathbb{R},\ x+(y+z) = (x+y)+z$

d.) Existe un único número real 0 tal que $0+x = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$

e.) Para cada $x \in \mathbb{R}$ existe un único $-x \in \mathbb{R}$ tal que $x+(-x) = 0$

f.) $\forall\ x,y \in \mathbb{R},\ x \cdot y \in \mathbb{R}$ y, si $x = w \wedge y = z$, entonces $x \cdot y = w \cdot z$.

g.) $\forall\ x,y \in \mathbb{R},\ x \cdot y = y \cdot x$

h.) $\forall\ x,y,z \in \mathbb{R},\ x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$

i.) Existe un único número real 1 con $1 \neq 0$, tal que $1 \cdot x = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$

j.) Para cada $x \in \mathbb{R}$ con $x \neq 0$, existe un único $\frac{1}{x} \in \mathbb{R}$ tal que $x \cdot \frac{1}{x} = 1$. También se escribe $x^{-1} = \frac{1}{x}$.

k.) $\forall\ x,y,z \in \mathbb{R},\ x \cdot (y+z) = x \cdot y + x \cdot z$

La resta $x - y$ se define como $x + (-y)$ y el cociente $\frac{x}{y} = x \cdot \frac{1}{y}$, además si $n \in \mathbb{N},\ x^n = \underbrace{x \cdot x \cdots x}_{n \text{ veces}}$, etc.

Axiomas de orden. Además de los axiomas de campo, los números reales también satisfacen los siguientes axiomas de orden:

a.) $\forall\ x,y \in \mathbb{R}$ entonces se cumple exactamente una de las siguientes relaciones: $x = y,\ x > y$, o $x < y$ **(Ley de tricotomía).**

b.) $\forall\ x,y,z \in \mathbb{R}$, si $x < y \wedge y < z$, entonces $x < z$

c.) $\forall\ x,y,z \in \mathbb{R}$, si $x < y$, entonces $x + z < y + z$

d.) $\forall\ x,y,z \in \mathbb{R}$, si $x < y \wedge z > 0$ entonces $x \cdot z < y \cdot z$

De aquí podemso deducir algunas propiedades familiares:

Teorema 2.2

Sean $x,y,z \in \mathbb{R}$.

a.) Si $x + z = y + z$, entonces $x = y$

b.) $x \cdot 0 = 0$

c.) $-0 = 0$

d.) $(-1) \cdot x = -x$

e.) $x \cdot y = 0 \Longleftrightarrow x = 0$ o $y = 0$

f.) $\forall\ x,y,z \in \mathbb{R}$, si $x < y \wedge z < 0$ entonces $x \cdot z > y \cdot z$

Los números racioneales. Recordemos que $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} \text{ tal que } m,n \in \mathbb{Z} \wedge n \neq 0. \right\} \subset \mathbb{R}$. Este conjunto también es un campo ordenado. Como usual,

a.) $\frac{a}{b} + \frac{p}{q} = \frac{a \cdot q + b \cdot p}{b \cdot q}$

b.) $\frac{a}{b} \cdot \frac{p}{q} = \frac{a \cdot p}{b \cdot q}$

c.) $\frac{a}{b} \geq \frac{p}{q} \Longleftrightarrow \frac{a}{b} - \frac{p}{q} \geq 0$

La siguiente propiedad es de gran utilidad:

Teorema 2.3

Sean $x, y \in \mathbb{R}$ tal que $x \leq y + \epsilon$ para todo $\epsilon > 0$. Entonces $x \leq y$.

Valor absoluto. Si $x \in \mathbb{R}$, entonces el valor absoluto de $\mathbb{R}$ es $|x|$, y se define como

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \geq 0 \\ -x & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

Las propiedades básicas del valor absoluto son:

Teorema 2.4

Sean $x, y, a \in \mathbb{R}$ con $a \geq 0$, entonces

a.) $|x| \geq 0$ y $|x| \geq x$.

b.) $|x| \leq a \iff -a \leq x \leq a$

c.) $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$

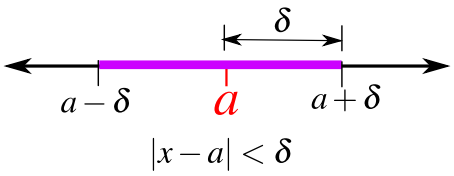
d.) $|x + y| \leq |x| + |y|$ **(desigualdad triangular)**.

- Observe que en la desigualdad $|x + y| \leq |x| + |y|$ podemos sustituir $x - c$ por x y $y - c$ por y y obtenemos

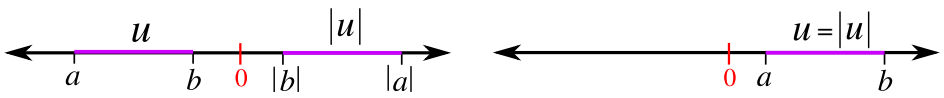
$$|x - y| \leq |x - c| + |c - y|$$

- También observe que, como $|x| \leq a \iff -a \leq x \leq a$, entonces

$$|x - a| < \delta \implies -\delta < x - a < \delta \implies a - \delta < x < a + \delta$$



- De gran utilidad es visualizar el valor absoluto de manera geométrica



a.) Si $a < u < b < 0 \implies |b| < |u| < |a|$

b.) Si $0 < a < u < b \implies a < |u| < b$

c.) Si $a < 0 < b$ y si $a < u < b \implies \text{mín}\{|a|,|b|\} < |u| < \text{máx}\{|a|,|b|\}$

Axioma de completitud. Hasta ahora los axiomas y las propiedades que hemos enunciado son válidas tanto para $\mathbb{R}$ como para $\mathbb{Q}$. Hay un axioma adicional que hace la diferencia.

Conjuntos acotados. Sea S subconjunto de $\mathbb{R}$. Si existe un número $M \in \mathbb{R}$ tal que $M \geq s$ para todo $s \in S$ entonces decimos que M es una cota superior de S. El concepto de cota inferior se define de manera similar.

Supremo. Si una cota superior $M \in S$, entonces $M = \text{máx}\, S$. Si S subconjunto no vacío de $\mathbb{R}$, entonces la más pequeña cota superior de S se llama *supremo* de S y se escribe $M = \text{Sup}\, S$.

Por ejemplo, si consideramos los intervalos $S_1 = [a,b]$ y $S_2 = [a,b[$, entonces $b = \text{máx}\, S_1$ y $b = \text{Sup}\, S_2$

(Axioma de completitud)

Todo subconjunto no vacío de $\mathbb{R}$ que es acotado superiormente, tiene supremo

Observe que $S = \left\{ q \in \mathbb{Q} \text{ tal que } 0 \leq q \leq \sqrt{2} \right\}$ no tiene supremo como subconjuto de $\mathbb{Q}$ pues $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, pero todo cambia si $q \in \mathbb{R}$.

Teorema 2.5 (Propiedad arquimediana de $\mathbb{R}$)

$\mathbb{N}$ no es acotado superiormente en $\mathbb{R}$. Equivalentemente,

a.) para cada $z \in \mathbb{R}$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n > z$

b.) para cada $x,y \in \mathbb{R}$ con $x > 0$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $nx > y$

c.) para cada $x \in \mathbb{R}$ con $x > 0$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $0 < \dfrac{1}{n} < x$

Teorema 2.6 (Densidad de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$)

Si $x,y \in \mathbb{R}$ con $x < y$, entonces existe $r \in \mathbb{Q}$ tal que $x < r < y$.

2.1 Ejercicios

R **2.1.1** Verifique: Si $x,y \in \mathbb{R}$ tal que $y < x$, entonces $\dfrac{x+y}{2} < x$

R **2.1.2** Verifique: Si $x,y \in \mathbb{R}$ tal que $x \leq y + \epsilon$ para todo $\epsilon > 0$. Entonces $x \leq y$.

R **2.1.3** Verifique la regla de los signos: Si $x,y \in \mathbb{R}$,*entonces*

a.) $-(-x) = x$

b.) $(-x)y = -(xy)$

c.) $(-x)(-y) = xy$

R **2.1.4** Verifique que si $x,y,z \in \mathbb{R}$ con $z \neq 0$, entonces $xz = yz \implies x = y$. ¿porqué es necesaria la hipótesis $z \neq 0$

R **2.1.5** Verifique que si $x,y,z \in \mathbb{R}$, entonces

a.) si $x \neq 0 \implies x^2 > 0$

b.) si $x > 1 \implies x^2 > x$

c.) si $0 < x < 1 \implies x^2 < 1$

d.) si $0 < x < y \implies 0 < \dfrac{1}{y} < \dfrac{1}{x}$

e.) si $0 < x < y \implies x^n < y^n$ con $n \in \mathbb{N}$

f.) si $0 < x < y \implies \sqrt{x} < \sqrt{y}$

R **2.1.6** ¿Bajo qué condiciones, si $x < y$ entonces $x^2 < y^2$?

R **2.1.7** Verifique: Si $x \geq 0$ y $x \leq \epsilon$, para todo $\epsilon < 0$, entonces $x = 0$.

R **2.1.8** Si $x,y \in \mathbb{R}$, verifique que $|x - y| = |y - x|$

R **2.1.9** Si $x,y \in \mathbb{R}$, verifique

a.) $||x| - |y|| \leq |x - y|$ (sugerencia: $|x| = |x - y + y|$ y $|y| = |y - x + x|$).

b.) $|x - y| < c \implies |x| < |y| + c$

c.) Si $|x - y| < \epsilon$ para todo $\epsilon > 0$, entonces $x = y$

R **2.1.10** Verifique que si $0 < x - a < b$, entonces $|x - a| < b$

R **2.1.11** Verifique que si $0 < |x - 3| < 1$, entonces $|x - 2| < 2$.

Ⓡ **2.1.12** Sean $p,a,b \in \mathbb{R}$. Si $0 < a < p < b$, verifique que $\dfrac{1}{b} < \dfrac{1}{p} < \dfrac{1}{a}$

Ⓡ **2.1.13** Verifique que si $0 < |x-2| < \dfrac{1}{2}$, entonces $\dfrac{1}{|x-1|} < 2$

Ⓡ **2.1.14** Verifique que si $0 < |x-2| < \dfrac{1}{2}$, entonces $\dfrac{7}{2} < |x-6| < \dfrac{9}{2}$

Ⓡ **2.1.15** Verifique que si $0 < |x-2| < \dfrac{1}{2}$, entonces $\dfrac{|x-6|}{|x-1|} < 9$

Ⓡ **2.1.16** Verifique que si $|x-3| < \dfrac{\epsilon}{5}$, entonces $|5x-15| < \epsilon$

Ⓡ **2.1.17** Verifique que si $|x-2| < \dfrac{\epsilon}{2}$, entonces $|2\operatorname{sen}(x)(x-2)| < \epsilon$

Ⓡ **2.1.18** Sea $\delta = \text{mín}\left\{1, \dfrac{\epsilon}{2}\right\}$. Verifique que si $0 < |x-3| < \delta$, entonces $|x^2-5x+6| < \epsilon$

Ⓡ **2.1.19** Sea $\delta = \text{mín}\left\{\dfrac{1}{2}, \dfrac{\epsilon}{9}\right\}$. Pruebe que si $0 < |x-2| < \delta$, entonces $\left|\dfrac{x^2+3x+1}{x-1} - 11\right| < \epsilon$

Ⓡ **2.1.20** Sea $N > 0$ y sea $\delta = \sqrt{\dfrac{2}{N}}$. Verifique que si $0 < |x-6| < \delta$, entonces $\dfrac{2}{(x-6)^2} > N$

Ⓡ **2.1.21** Verifique que si $0 < |x-1| < \dfrac{\epsilon}{2}$, entonces $\left|\dfrac{2x^2-3x+1}{x-1} - 1\right| < \epsilon$

Ⓡ **2.1.22** Verifique que si $0 < |x-3| < \text{mín}\left\{1, \dfrac{\epsilon}{9}\right\}$, entonces $|x^2+2x+6-21| < \epsilon$

Ⓡ **2.1.23** Encuentre δ tal que si $|x-2| > \delta$, entonces (en cada caso),

a.) $|x^2+x-6| < 1$

b.) $|x^2+x-6| < 1/n$ con $n \in \mathbb{N}$ fijo.

c.) $|x^2+x-6| < \epsilon$ con $\epsilon > 0$ dado

2.2 Solución de los ejercicios del capítulo 1

Soluciones del Capítulo 1

Ejemplo: Límite de una función: Definición formal

Nos interesa conocer hacia dónde tienden los valores de una función f, conforme nos acercamos a un punto $x = c$.

Por ejemplo, consideremos el comportamiento de $f(x) = 2(x-2)\,\mathrm{sen}(x/2) + 3$ en los alrededores de $x = 2$, es decir, tomando valores por la izquierda de $x = 2$, denotado $x \to 2^-$, y tomando valores por la derecha de $x = 2$, denotado $x \to 2^+$.

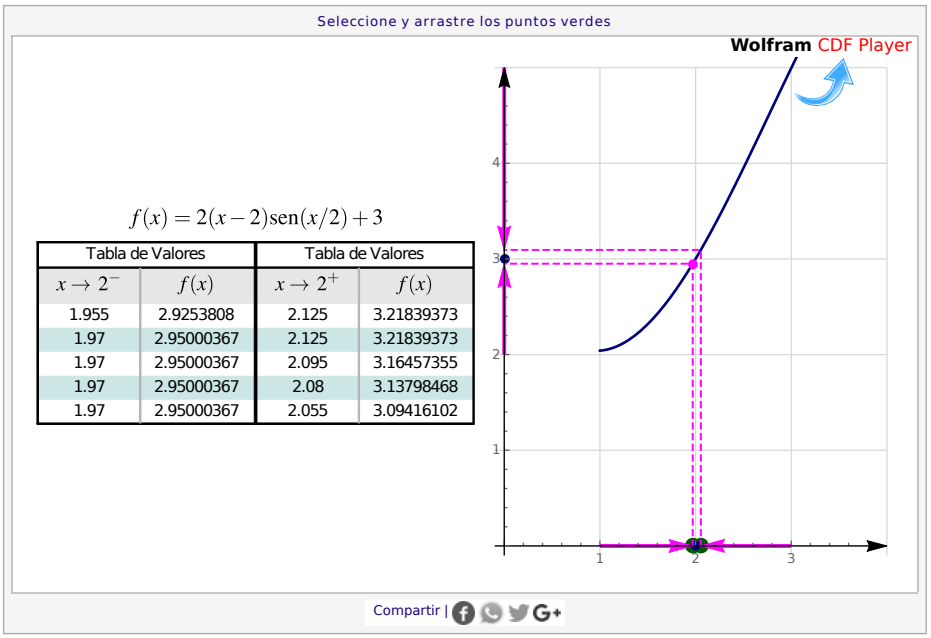


Tabla de Valores		Tabla de Valores	
$x \to 2^-$	$f(x)$	$x \to 2^+$	$f(x)$
1.955	2.9253808	2.125	3.21839373
1.97	2.95000367	2.125	3.21839373
1.97	2.95000367	2.095	3.16457355
1.97	2.95000367	2.08	3.13798468
1.97	2.95000367	2.055	3.09416102

Como se observa, conforme nos acercamos a $x = 2$ por la derecha y por izquierda, entonces parece que $f(x)$ tiende a $L = 3$, y no pasa de ahí (es un valor "límite"). Escribimos

$$\lim_{x \to 2} 2(x-2)\,\mathrm{sen}(x/2) + 3 \;=\; 3$$

Desafortunadamente, con solo la tabla de arriba, no podemos estar seguros de que si nos acercamos más a $x = 2$, la función va seguir acercándose cada vez más a $L = 3$, como su valor límite.

Para estar seguros de que el límite existe, es decir, $\lim_{x \to c} f(x) = L$, necesitamos una prueba formal, basada en una definición aceptable del límite de una función: El límite de f, cuando x tiende a c, es L si $f(x)$ se puede acercar a L, tanto como queramos, tomando valores de x suficientemente

cercanos a c.

La "cercanía" de $f(x)$ a L se estima con "$|f(x) - L| < \epsilon$": Si ϵ es muy pequeño, $f(x)$ está muy cercano a L. La "cercanía" de x a c se estima con "$|x - c| < \delta$.". En la definción que sigue, la escogencia del δ usualmente depende del valor de ϵ.

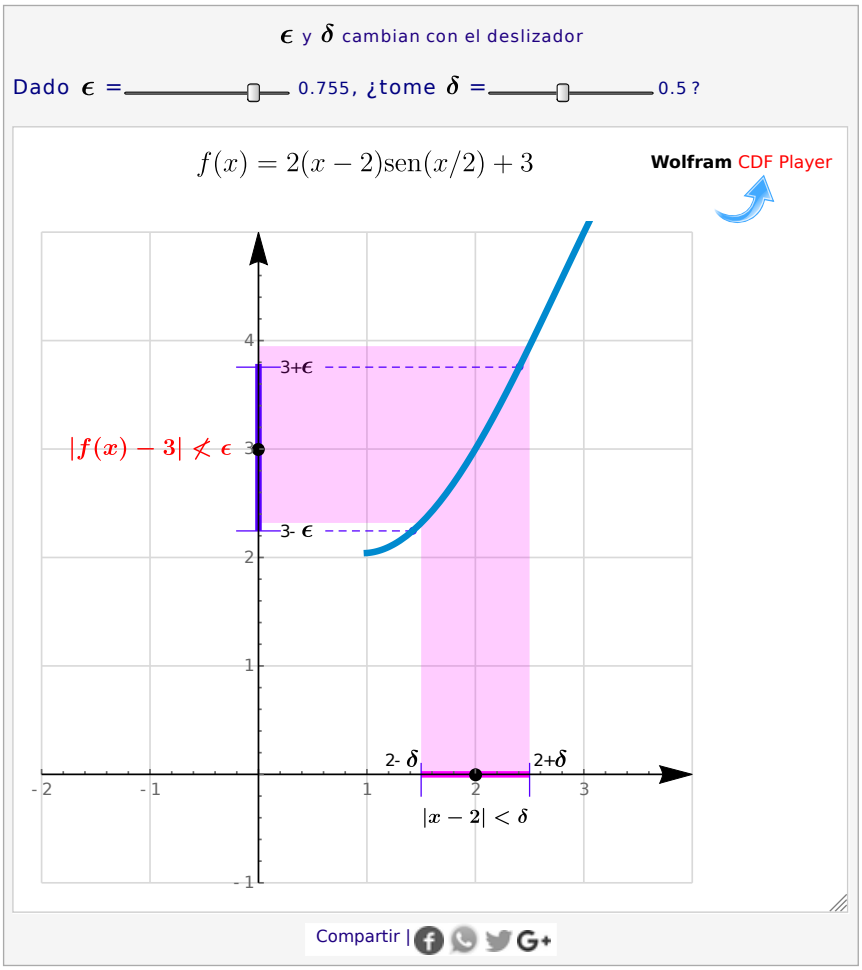
Definición 3.1 (formal de límite)

Sea $f : D \to \mathbb{R}$ y sea $x = c$ un punto de acumulación[1] de D. Decimos que

$$\lim_{x \to c} f(x) = L \iff \forall\, \epsilon > 0,\ \exists\, \delta > 0 \text{ tal que } |f(x) - L| < \epsilon \text{ siempre que } 0 < |x - c| < \delta$$

En la aplicación interactiva que sigue, podemos tomar valores para ϵ pequeños y buscar valores para δ adecuados. recordemos que queremos formalizar el límite

$$\lim_{x \to 2} 2(x-2)\,\mathrm{sen}(x/2) + 3 \;=\; 3$$



[1] Si D es subconjunto de $\mathbb{R}$, decimos que x es un punto de acumulación de D si cualquier intervalo abierto que contenga a x, interseca a D

Para verificar que $\lim_{x\to c} f(x) = L$ usando la definición de límite, usualmente analizamos la expresión $|f(x) - L|$ con tal de establecer un valor para δ (posiblemente en términos de ϵ), de tal manera que se cumpla la definición.

La definción formal "$\epsilon - \delta$" es debida a Karl Weierstrass (1815-1897) aunque ya se usaba mucho antes, en los argumentos de prueba por A. Cauchy y B. Bolzano.

Ejemplo 3.1

Verifique, usando la definición de límite de una función, que

$$\lim_{x\to 2} 2(x-2)\operatorname{sen}(x/2) + 3 \;=\; 3$$

Solución: Lo que hacemos es, dado $\epsilon > 0$, analizar $|2(x-2)\operatorname{sen}(x/2) + 3 \;-\; 3|$ con la intención de encontrar δ de tal manera que

$$\text{si } 0 < |x-2| < \delta \implies |2(x-2)\operatorname{sen}(x/2) + 3 \;-\; 3| < \epsilon$$

Bien, usamos el hecho de que $|\operatorname{sen} x| < 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$, entonces

$$\begin{aligned} |2(x-2)\operatorname{sen}(x/2) + 3 \;-\; 3| &= |2(x-2)\operatorname{sen}(x/2)| \\ &< 2|x-2| \;<\; \epsilon \end{aligned}$$

de donde, bastaría que $|x-2| < \dfrac{\epsilon}{2}$, es decir, $\delta = \dfrac{\epsilon}{2}$.

Formalmente: Dado $\epsilon > 0$, tome $\delta = \dfrac{\epsilon}{2}$. De esta manera,

$$\begin{aligned} \text{si } 0 < |x-2| < \frac{\epsilon}{2} \implies |2(x-2)\operatorname{sen}(x/2) + 3 \;-\; 3| &= |2(x-2)\operatorname{sen}(x/2)| \\ &< 2|x-2| \\ &< 2\cdot\frac{\epsilon}{2} \quad \text{pues } |x-2| < \frac{\epsilon}{2} \\ &< \epsilon \end{aligned}$$

Ejemplo 3.2 **(Acotar el δ)**

Verifique, usando la definición de límite de una función, que

$$\lim_{x\to 3} x^2 - 5x + 12 \;=\; 6$$

Solución: Dado $\epsilon > 0$, debemos encontrar δ (que posiblemente dependa de ϵ), tal que

$$\text{si } 0 < |x-3| < \delta \implies |x^2 - 5x + 12 \ - \ 6| < \epsilon$$

Como antes, debemos analizar $|x^2 - 5x + 12 \ - \ 6|$:

$$\begin{aligned} |x^2 - 5x + 12 \ - \ 6| &= |x^2 - 5x + 6| \\ &= |(x-3)(x-2)| \ < \ \delta|x-2| \ < \ \epsilon \text{ pues } |x-3| < \delta \end{aligned}$$

Mmmmm... para poder visualizar lo que debe ser δ, necesitamos cambiar (acotar) $|x-2|$ por un valor más grande. Eso se podría lograr si *acotamos* provisonalmente el δ: De por sí sabemos que algún valor $\delta < 1$ podría servir (escogemos un entorno donde la función no se indefina).

Así que supongamos que $\delta < 1$, entonces

$$|x-3| < 1 \implies 2 < x < 4 \implies 0 < x-2 < 2 \implies |x-2| < 2.$$

De esta manera: $|x^2 - 5x + 6| \ < \ |x-2|\delta \ < \ 2\delta \ < \epsilon$, así, bastaría tomar $\delta = \dfrac{\epsilon}{2}$ siempre y cuando $\delta < 1$..., es decir,

$$\delta = \text{mín}\left\{1, \frac{\epsilon}{2}\right\} \quad \text{y entonces} \quad \begin{cases} \delta \ < \ 1 \\ \delta \ < \ \epsilon/2 \end{cases}$$

Formalmente: Dado $\epsilon > 0$, tome $\delta = \text{mín}\left\{1, \dfrac{\epsilon}{2}\right\}$. De esta manera,

$$\begin{aligned} \text{si } 0 < |x-3| < \delta \implies \ |x^2 - 5x + 12 \ - \ 6| &= |x-3|\,|x-2| \\ &< \frac{\epsilon}{2}|x-2| \ \ (\text{pues } |x-3| < \delta < \frac{\epsilon}{2}) \\ &< 2 \cdot \frac{\epsilon}{2} \ \ (\text{pues como } |x-3| < \delta < 1 \implies |x-2| < 2) \\ &< \epsilon \end{aligned}$$

Ejemplo 3.3 **(Acotar el δ)**

Usando la definición formal de límite, muestre que $\lim\limits_{x\to 2}(x^2 - x) = 2$

Solución: HQM Dado $\varepsilon > 0$, $\exists\, \delta > 0$ tal que $0 < |x-2| < \delta \implies |x^2 - x - 2| < \varepsilon$

Tome $\delta = \text{mín}\left\{1, \frac{\varepsilon}{4}\right\}$, entonces $\begin{cases} |x-2| < \delta \implies |x-2| < \frac{\varepsilon}{4} \\ |x-2| < \delta \implies |x-2| < 1 \implies |x+1| < 4 \end{cases}$

De este modo,

$$|x-2| < \delta \implies |x^2 - x - 2| = |x-2|\,|x+1| < \frac{\varepsilon}{4} \cdot 4 = \varepsilon \checkmark$$

3.1 Ejercicios

3.1.1 Usando la definición formal de límite, verifique que $\lim\limits_{x\to 2} 5x - 3 = 7$

3.1.2 Usando la definición formal de límite, verifique que $\lim\limits_{x\to a} mx + b = m \cdot a + b$

3.1.3 Usando la definición formal de límite, verifique que $\lim\limits_{x\to a} 5\cos(x)(x-1) + 2 = 2$

3.1.4 Usando la definición formal de límite, verifique que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{5x^2 + 11x + 2}{x+2} = 1$

3.1.5 Usando la definición formal de límite, verifique que $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2x^2 - 8x + 6}{x-1} = -4$

3.1.6 Usando la definición formal de límite, verifique que $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{3x^2 - 12x}{x} = -3$

Acotar el δ

3.1.7 Usando la definición formal de límite, verifique que $\lim\limits_{x\to 2} x^2 = 4$

3.1.8 Usando la definición formal de límite, verifique que $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3 - 2x^2}{x-2} = 4$

3.1.9 Usando la definición formal de límite, verifique que $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2 + 3x + 1}{x-1} = 11$

3.1.10 Usando la definición formal de límite, verifique que $\lim\limits_{x\to 3} x^2 + 2x + 6 = 21$

3.1.11 Sea f y g funciones tales que $\lim_{x\to a} f(x) = 4$ y $\lim_{x\to a} g(x) = 7$. Utilice la defnición formal de límite para demostrar que

$$\lim_{x\to a} f(x) + g(x) = 11$$

3.1.12 Sea $L > 0$. Si $\lim_{x\to a} f(x) = L$ demostrar que existe $\delta > 0$ tal que

$$\text{si } 0 < |x-a| < \delta \implies \frac{2L}{3} < f(x) < \frac{4L}{3}$$

3.2 Solución de los ejercicios del capítulo 2

Soluciones del Capítulo 2

2.1.1

Usamos los axiomas de orden:

$$\begin{aligned} y < x &\implies y + x < x + x \\ &\implies \tfrac{1}{2}\cdot(y+x) < \tfrac{1}{2}\cdot(x+x) \\ &\implies \frac{x+y}{2} < x \end{aligned}$$

2.1.2

Por contradicción: Si $x > y$ entonces podemos tomar $\epsilon = \dfrac{x-y}{2} > 0$. Pero, por hipótesis $x \le y + \epsilon$, entonces

$$x \le y + \epsilon = y + \frac{x-y}{2} = \frac{x+y}{2} < x \implies x < x$$

Contradicción.

2.1.3

Usamos la definción y la unicidad de los inversos aditivos.

a.) $-(-x) + (-x) = 0 \implies -(-x) = x$

b.) $(-x)y + (xy) = (-x+x)y = 0$
$\implies (-x)y = -(xy)$

c.)
$$\begin{aligned} (-x)(-y) - xy &= (-x)(-y) + (-x)y \\ &= -x(-y+y) = 0 \\ &\implies (-x)(-y) = xy \end{aligned}$$

2.1.4

Como $z \neq 0$, entonces $\dfrac{1}{z}xz = \dfrac{1}{z}yz \implies x = y$

2.1.5

Usamos los axiomas y las propiedades de la relación de orden.

a.) $x \neq 0 \implies x^2 > 0$ por la regla de los signos.

b.) $x > 1 \implies x\cdot x > x\cdot 1 = x \;\therefore\; x^2 > x$

c.) $0 < x < 1 \implies x\cdot x < x < 1 \;\therefore\; x^2 < 1$

d.) Podemos multiplicar por $1/y$ y por $1/x$,

$$0 < x < y \implies 0 < \frac{x}{y} < 1 \implies 0 < \frac{1}{y} < \frac{1}{x}$$

e.) Use inducción...

f.) Racionalizando: $\sqrt{x} - \sqrt{y} = \dfrac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} < 0$

pues $x - y < 0$ y $\sqrt{x}, \sqrt{y} > 0$. $\therefore\; \sqrt{x} < \sqrt{y}$

2.1.6 R

Podría analizar los tres casos: $0 < x < y$, $x < y < 0$ y $x < 0 < y$. La conlusión es:

$$|x| < |y| \implies x^2 < y^2, \text{ sino } x^2 \geq y^2$$

2.1.7 R

Por contradicción: Si $x > 0$, podemos tomar $\epsilon = \frac{x}{2} > 0$ y por hipótesis

$$x \leq \epsilon \implies 0 < x \leq \frac{x}{2}$$

lo cual es una contradicción pues $1 \not< 1/2$.

2.1.8 R

Use la definición de valor absoluto.

2.1.9 R

a.) Tenemos

$$|x| = |x - y + y| \leq |x - y| + |y|$$
$$|y| = |y - x + x| \leq |x - y| + |x|$$

Por tanto

$$-|x - y| \leq |x| - |y| \leq |x - y|$$

esto último es equivalente a lo que estamos buscando.

b.) $|x| - |y| \leq ||x| - |y|| \leq |x - y| < c$

$$\therefore \ |x| - |y| < c$$

c.) Si $x \neq y \implies |x - y| > 0$, entonces podemos y tomar $\epsilon = |x - y|/2$. Aplicando la hipótesis,

$$|x - y| < \epsilon$$

llegamos a una contradicción

2.1.10 R

Observe que $b > 0$, entonces

$$-b < 0 < x - a < b \implies |x - a| < b$$

2.1.11 R

$$\begin{aligned} |x - 3| < 1 &\implies 2 < x < 4 \\ &\implies 0 < x - 2 < 2 \\ &\implies |x - 2| < 2 \end{aligned}$$

2.1.12 R

2.1.13 R

$$\begin{aligned} 0 < |x - 2| < \frac{1}{2} &\implies \frac{3}{2} < x < \frac{5}{2} \\ &\implies \frac{1}{2} < x - 1 < \frac{3}{2} \\ &\implies \frac{1}{2} < |x - 1| < \frac{3}{2} \\ &\implies \frac{1}{|x - 1|} < 2 \end{aligned}$$

2.1.14 R

$$\begin{aligned} 0 < |x - 2| < \frac{1}{2} &\implies \frac{3}{2} < x < \frac{5}{2} \\ &\implies -\frac{9}{2} < x - 6 < -\frac{7}{2} \\ &\implies \frac{7}{2} < |x - 6| < \frac{9}{2} \end{aligned}$$

2.1.15 R

$$0<|x-2|<\frac{1}{2} \Longrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2} & < & |x-1| & < & \frac{3}{2} \\ \frac{7}{2} & < & |x-6| & < & \frac{9}{2} \end{cases}$$

de donde $\dfrac{|x-6|}{|x-1|}<2\cdot\dfrac{9}{2}=9$

2.1.16 R

Este es un cálculo algebraíco con desigualdades:

$$\begin{aligned} |x-3|<\frac{\epsilon}{5} &\iff 5|x-3|<\epsilon \\ &\iff |5x-15|<\epsilon \end{aligned}$$

2.1.17 R

Usamos el hecho de que $|\operatorname{sen} x|<1$,

$$\begin{aligned} |2\operatorname{sen}(x)(x-2)| &< |2(x-2)| \\ &< 2\frac{\epsilon}{2}=\epsilon \end{aligned}$$

2.1.18 R

Observe que $x^2-5x+6=(x-2)(x-3)$, entonces

$$\begin{aligned} |x^2-5x+6| &= |(x-2)(x-3)| \\ &= |x-2|\,|x-3| \\ &< |x-2|\delta \end{aligned}$$

Ahora debemos *acotar* la expresión $|x-2|$.

$|x-3|<\delta=\text{mín}\left\{1,\frac{\epsilon}{2}\right\}<1$, entonces

$$\begin{aligned} |x-3|<1 &\Longrightarrow 2<x<4 \\ &\Longrightarrow 0<x-2<2 \\ &\Longrightarrow |x-2|<2 \end{aligned}$$

Ahora completamos el razonamiento:

$|x-3|<\delta=\text{mín}\left\{1,\frac{\epsilon}{2}\right\}<\frac{\epsilon}{2}$, entonces

$$\begin{aligned} |x^2-5x+6| &< |x-2|\delta \\ &< 2\delta<2\cdot\frac{\epsilon}{2}=\epsilon \end{aligned}$$

2.1.19 R

$$\begin{aligned} \left|\frac{x^2+3x+1}{x-1}-11\right| &= \frac{|x-2||x-6|}{|x-1|} \\ &< \frac{\delta\,|x-6|}{|x-1|} \end{aligned}$$

Ahora debemos *acotar* las expresiones $|x-1|$ y $|x-6|$

$$0<|x-2|<\delta<\frac{1}{2} \Longrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2} & < & |x-1| & < & \frac{3}{2} \\ \frac{7}{2} & < & |x-6| & < & \frac{9}{2} \end{cases}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} \left|\frac{x^2+3x+1}{x-1}-11\right| &< \frac{\delta\,|x-6|}{|x-1|} \\ &< \frac{1}{|x-1|}\cdot\delta\cdot\frac{9}{2} \\ &< 2\cdot\delta\cdot\frac{9}{2}=9\delta \\ &< 9\cdot\frac{\epsilon}{9}=\epsilon \end{aligned}$$

2.1.20 R

$$\begin{aligned} |x-6| &< \delta = \sqrt{\frac{2}{N}} \\ |x-6| &< \sqrt{\frac{2}{N}} \\ (x-6)^2 &< \frac{2}{N} \\ \frac{2}{(x-6)^2} &> N \end{aligned}$$

2.1.21 R

2.1.22 R

2.1.23 R

a.) $\delta = 1/6$

b.) $\delta = 1/(6n)$

c.) $\delta = \text{mín}\{1, \epsilon/6\}$

Soluciones del Capítulo 3

3.1.1 R

Analizamos $|5x-3\ -\ 7|$

$$\begin{aligned} |5x-3\ -\ 7| &= |5x-10| \\ &= 5|x-1| < \epsilon \end{aligned}$$

Estos nos dice que debemos tomar $\delta = \frac{\epsilon}{5}$.

Formalmente: Si $0 < |x-2| < \frac{\epsilon}{5}$,

$$\begin{aligned} |5x-3\ -\ 7| &= 2|x-2| \\ &< 5\,\frac{\epsilon}{5} < \epsilon \end{aligned}$$

3.1.2 R

Analizamos $|mx+b\ -\ (m\cdot a+b)|$.

$$|mx+b\ -\ (m\cdot a+b)| = m|x-a|\ <\ \epsilon$$

Estos nos dice que si $m \neq 0$, $\delta = \frac{\epsilon}{m}$

Formalmente: Si $0 < |x-a| < \frac{\epsilon}{m}$,

$$\begin{aligned} |mx+b\ -\ (m\cdot a+b)| &= m|x-a| \\ &< m\,\frac{\epsilon}{m} < \epsilon \end{aligned}$$

Si $m = 0$, dado $\epsilon > 0$, tomamos cualquier $\delta > 0$, la definición se cumple trivialmente:

$$|x-a| < \delta \implies |b-b| < \epsilon.$$

3.1.3 R

Analizamos $|5\cos(x)(x-1)+2\ -\ 2|$

$$\begin{aligned} |5\cos(x)(x-1)+2\ -\ 2| &= 5|\cos(x)||x-1| \\ &< 5|x-1|\ <\ \epsilon \end{aligned}$$

Estos nos dice que $\delta = \frac{\epsilon}{5}$

Formalmente: Si $0 < |x-a| < \frac{\epsilon}{5}$,

$$\begin{aligned} |5\cos(x)(x-1)+2\ -\ 2| &= 5|\cos(x)||x-1| \\ &< 5|x-1| \\ &< 5\,\frac{\epsilon}{5} < \epsilon \end{aligned}$$

3.1.4 R

Analizamos $\left|\dfrac{5x^2+11x+2}{x+2} - 1\right|$

$$\begin{aligned}\left|\frac{5x^2+11x+2}{x+2} - 1\right| &= \left|\frac{(5x+1)(x+2)}{x+2} - 1\right| \\ &= 5|x| < \epsilon\end{aligned}$$

Estos nos dice que $\delta = \dfrac{\epsilon}{5}$

Formalmente: Si $0 < |x-0| < \dfrac{\epsilon}{5}$,

$$\begin{aligned}\left|\frac{5x^2+11x+2}{x+2} - 1\right| &= |5x| \\ &< 5\,\frac{\epsilon}{5} < \epsilon\end{aligned}$$

3.1.5 R

Analizamos $\left|\dfrac{2x^2-8x+6}{x-1} + 4\right|$

$$\left|\frac{2x^2-8x+6}{x-1} + 4\right| = |2(x-1)| < \epsilon$$

Estos nos dice que $\delta = \dfrac{\epsilon}{2}$

Formalmente: Si $0 < |x-1| < \dfrac{\epsilon}{2}$,

$$\left|\frac{2x^2-8x+6}{x-1} + 4\right| = 2|x-1| < 2\,\frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

3.1.6 R

Justifique por qué se debería tomar $\delta = \dfrac{\epsilon}{3}$ y luego haga la prueba formal.

3.1.7 R

Analizamos $|x^2-4|$ si $|x-2| < \delta$

$$\begin{aligned}|x^2-4| &= |x-2||x+2| \\ &< \delta\,|x+2| < \epsilon\end{aligned}$$

Para acotar $|x+2|$, acotamos δ.

Por ejemplo, si $\delta < 1 \implies |x+2| < 5$. Entonces se debería tomar

$$\delta = \text{mín}\left\{1, \frac{\epsilon}{5}\right\}$$

Formalmente: Si $|x-2| < \delta$,
El estudiante debe completar la prueba

3.1.8 R

Observe que

$$\left|\frac{x^3-2x^2}{x-2} - 4\right| = x^2 - 4$$

Ahora ya puede completar la prueba (puede mirar el ejemplo anterior)

3.1.9 R

$$\begin{aligned}\left|\frac{x^2+3x+1}{x-1} - 11\right| &= \frac{|x-2||x-6|}{|x-1|} \\ &< \frac{\delta\,|x-6|}{|x-1|}\end{aligned}$$

Acotamos: Sea $\delta < \dfrac{1}{2}$. Ahora debemos, con la información que tenemos, *acotar* las expresiones $|x-1|$ y $|x-6|$

$$0 < |x-2| < \delta < \frac{1}{2} \implies \begin{cases} \dfrac{1}{2} < |x-1| < \dfrac{3}{2} \\[2ex] \dfrac{7}{2} < |x-6| < \dfrac{9}{2} \end{cases}$$

Por tanto, tomamos $\delta = \text{mín}\left\{\dfrac{1}{2}, \dfrac{\epsilon}{9}\right\}$ ¿por qué? (debe justificar)

Formalmente: Si $|x-2| < \delta$,

$$\begin{aligned}\left|\frac{x^2+3x+1}{x-1} - 11\right| &< \frac{\delta\,|x-6|}{|x-1|} \\ &< 2\cdot\delta\cdot\frac{9}{2} \text{ pues...} \\ &< 9\cdot\frac{\epsilon}{9} = \epsilon \text{ pues...}\end{aligned}$$

3.1.10 R

Justifique por qué se puede tomar

$$\delta = \text{mín}\left\{1, \frac{\epsilon}{9}\right\}$$

Luego haga la prueba formal.
El estudiante debe completar la prueba

3.1.11 R

Observe que

$$\begin{aligned} |f(x) + g(x) - 11| &= |f(x) - 4 + g(x) - 7| \\ &\leq |f(x) - 4| + |g(x) - 7| \end{aligned}$$

Ahora utilizamos la hipótesis para hacer una prueba formal.

Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 4$, entonces, dado $\epsilon > 0$ también $\epsilon/2 > 0$, por lo que para esta cantidad existe $\delta_1 > 0$ tal que

$$\text{si } 0 < |x - a| < \delta_1 \implies |f(x) - 4| < \frac{\epsilon}{2}$$

Si $\lim\limits_{x \to a} g(x) = 7$, entonces...

El estudiante debe completar la prueba

3.1.12 R

Como $L > 0$, tome $\epsilon = L/3$. El estudiante debe completar la prueba

Bibliografía

[1] I. A. Maron. *Problems in Calculus of One Variable.* CBS Publishers & Distributors.

[2] W. Kaplan, D. J. Lewis. *Calculus and Linear Algebra.* John Wiley & Sons. 1971

[3] E. Hernández S. *Cálculo Diferencial e Integral con Aplicaciones*. Revista digital Matemáticas, Educación e Internet. https://tecdigital.tec.ac.cr/revistamatematica/Libros/

[4] S. Schmidt et al. "Práctica del curso Cálculo Diferencial e Integral. Selección de ejercicios." Revista digital, Matemática, Educación e Internet. https://tecdigital.tec.ac.cr/revistamatematica/Libros/practicas/

[5] G. Sanabria B. "Guía del curso de Cálculo: Límites". Folleto ITCR.

[6] E. Agüero, J. Chavarría, J.J. Fallas. "Folleto de prácticas de Cálculo Diferencial e Integral" ITCR, 2011

[7] L. Acuña P. "Cálculo diferencial e integral". Folleto, ITCR, 2016.

[8] C. Páez P. "Práctica General de CDI". ITCR. 2015.

[9] S. Meneses R. "Prácticas para Cálculo diferencial e integral". Folleto. ITCR.

[10] P. García D. "Prácticas para Cálculo diferencial e integral". ITCR.

[11] M. Gutiérrez M. "Prácticas para Cálculo diferencial e integral". ITCR.