

微積溯源序

微積溯源八卷，前四卷爲微分術，後四卷爲積分術，乃算學中最深之事也。余既與西士傅蘭雅譯畢代數術二十五卷，更思求其進境，故又與傅君譯此書焉。先是咸豐年間，曾有海甯李壬叔與西士偉烈亞力譯出代微積拾級一書，流播海內。余素與壬叔相友，得讀其書，粗明微積二術之梗概。所以又譯此書者，蓋欲補其所略也。書中代數之式甚繁，校算不易，則劉君省菴之力居多。

今刻工已竣矣，故序之，曰：吾以爲古時之算法惟有加減而已。其乘與除乃因加減之不勝其繁，故更立二術以使之簡易也。開方之法，又所以濟除法之窮者也。蓋算學中自有加減乘除開方五法，而一切淺近易明之數，無不可通矣。惟人之心思智慮日出不窮，往往以能人之所不能者爲快。遇有窒礙難通之處，輒思立法以濟其窮。故有減其所不可減而正負之名不得不立矣；除其所不能除而寄母通分之法又不得不立矣。代數中種種記號之法皆出於不得已而立者也，惟每立一法必能使繁者爲簡，難者爲易，遲者爲速，而算學之境界藉此得更進一層。如是屢進不已而所立之法於是乎日多矣。微分積分者，蓋又因乘除開

方之不勝其繁，且有窒礙難通之處，故更立此二術以濟其窮，又使簡易而速者也。試觀圓徑求周、真數求對等事，雖無微分積分之時，亦未嘗不可求，惟須乘除開方數十百次。其難有不可言喻者，不如用微積之法理明而數捷也。然則謂加減乘除開方代數之外者，更有二術焉，一曰微分，一曰積分可也。其積分術爲微分之還原，猶之開平方爲自乘之還原、除法爲乘之還原、減法爲加之還原也。然加與乘其原無不可還，而微分之原有可還有不可還，是猶算式中有不可開之方耳，又何怪焉。如必曰加減乘除開方已足供吾之用矣，何必更究其精？是舍舟車之便利而必欲負重遠行也。其用力多而成功少，蓋不待智者而辨矣。

同治十三年九月十八日，金匱華蘅芳序。

微積溯源卷一

論變數與函數之變比例

第一款 用代數以解任何曲線，其中每有幾種數，其大小恒有定率者，如橢圓之長徑、拋物線之通徑、雙曲線之屬徑之類是也。

又每有幾種數可有任若干相配之同數，其大小恒不能有定率者，如曲線任一點之縱橫線是也。

數既有此兩種分別，則每種須有一總名以賅之，故名其有定之數曰常數，無定之數曰變數。

凡常數之同數不能增亦不能損。

凡變數之同數，能變爲大，亦能變爲小。故其從此同數變至彼同數之時，必歷彼此二數間最小最微之各分數。

如平圓之半徑爲常數，而其任一段之弧或弧之弦矢切割各線，及各線與弧所成之面，

皆謂之變數。

橢圓之長徑短徑皆爲常數，而其曲線之任一段或曲線上任一點之縱橫線，並其形內形外所能作之任何線或面或角，皆謂之變數。

拋物線之通徑爲常數，而其曲線之任一段或任一點之縱橫線、或弧與縱橫線所成之面，皆謂之變數。他種曲線亦然。

凡常數，恒以甲乙丙丁等字代之。凡變數，恒以天地人等字代之。

第二款 若有彼此二數皆爲變數，此數變而彼數因此數變而亦變者，則彼數爲此數之函數。

如平圓之八線皆爲弧之函數。若反求之，亦可以弧爲八線之函數。

又如重學中令物體前行之力，與其物所行之路，皆爲時刻之函數。

如有式 $\frac{\text{地} \perp \text{天}}{\text{甲} \perp \text{天}}$ ，此式中甲爲常數，天爲自主之變數，地爲天之函數。故地之同

數能以天與甲明之。

如有式 $\frac{\text{地} \perp \text{一}}{\text{甲}(\text{地} \perp \text{一})}$ ，此式中甲與一皆爲常數，地爲自主之變數，天爲地之函數，

故天之同數可以地與甲及一明之。

如有式 $\frac{\text{丙} \perp \text{天}^2}{\text{甲} \perp \sqrt{\text{乙} \text{天}}}$ ，其甲

乙丙爲常數，天爲自變之數，而戊皆爲天之函數。

凡函數之中，可以有數箇自主之變數。

如有式 $戊 = 甲天^2 + 乙天地 + 丙地^2$ ，則天與地皆爲自主之變數，戊爲天地兩變數之函數。

凡變數之函數，其形雖有多種，然每可化之，使不外乎以下數類 $天^{\frac{1}{2}}$ ， $天^{\frac{1}{3}}$ ， $天^{\frac{1}{4}}$ ， $天^{\frac{1}{5}}$ 等類是也。

凡函數爲 $天^{\frac{1}{n}}$ 之類，其指數爲常數，則可從天之卯方，用代數之常法化之。而以有窮之項明其函數之同數。故謂之代數函數，亦謂之常函數。

如有式 $戊 = 甲天^2 + \sqrt{\frac{甲^2 + 天^2}{乙天^2 + 丙^2}}$ ，此種函數，其戊之同數可用加減乘除開方等法而得之。

凡函數爲 $天^{\frac{1}{n}}$ 之類，則其函數之同數不能以有窮之項明之。故謂之越函數。越者，超越於尋常之意也。

凡函數爲 $天^{\frac{1}{n}}$ ， $天^{\frac{1}{m}}$ 及 $天^{\frac{1}{k}}$ ， $天^{\frac{1}{l}}$ 之類，其函數之同數皆可以平圓之各線明之。故謂之圓函數，亦謂之角函數。以上三種函數常函數、越函數、圓函數也。，若已知天之同數，則其函數之同數即可求得。故

名此三種函數爲陽函數。因其顯而易明，故謂之陽函數。

更有他種函數，必先解其方程式，令函數中之各變數分開，然後能求其同數者。

如有式 $x^2 = \frac{x^2 - 1}{x}$ ，其成爲天之函數，如欲求其成與天相配之同數，必先解其次方程式始能通。

此種之式名曰天之陰函數。因其雜糅未明，故謂之陰函數。反之亦可云天爲成之陰函數。

如解其方程式爲 $x^2 = \frac{x^2 - 1}{x}$ ，則成變爲天之陰函數。

整理者註：右最後一句云成變爲天之陰函數，這顯而易見是錯誤的。原文大英百科全書卷第九之 Fluxions 作 explicit function，即陽函數，此當爲譯者譯錯。目前由於校勘凡例未定，暫留此字，待討論後決定修改與否。

昔代數之家，凡遇須用開平方之處，每于其式之左旁作一根字以記之，如 \sqrt{x} 爲天之平方根。後又變通其法，而以根號記之，如 \sqrt{x} 爲天之平方根。此代數之例也。茲可仿照此例，凡遇某變數之函數，亦用一號以記之。所以凡有任何變數之函數，皆可書一函字于其變數之旁，以爲識別。

如天之函數則作 $\text{函}x$ ，或作 $\text{函}(x)$ ，皆言天之函數也。

所以凡見變數之左旁有一函字者，其函字并非代表天之倍數，其意謂是某變數之函數

也。

用此法則可將 $\text{戊} = \text{天}^{\text{卯}}$ 、 $\text{戊} = \text{甲}^{\text{天}}$ 、 $\text{戊} = \text{對天}$ 、 $\text{戊} = \text{正弦天}$ 、 $\text{戊} = \text{餘弦天}$ 各種之式以一語賅之，謂之 $\text{戊} = \text{函天}$ 或 $\text{戊} = \text{函}(\text{天})$ 。

若函數從兩箇變數而成，其天與地皆爲自主之變數，其式如 $\text{戊} = \text{甲}^{\text{天}} \text{乙}^{\text{地}}$ 者，則可以 $\text{戊} = \text{函}(\text{天}, \text{地})$ 別之。函數爲多箇變數所成者，仿此推之。惟函數只指其變數言之，若甲乙丙丁各常數。雖多不論。

第三款 凡觀此書者，必先明變數與函數變比例之限。如幾何原本中證明平圓之面積必比其外切多等邊形之面積微小，若其外切多等邊形之邊愈多，則其面積愈近于平圓之面積。所以可設平圓之面積爲任何小，而切其圓外爲多等邊形，可使多等邊形之面積與平圓之面積較其數甚小于所設之圓面積；再設其多等邊形之面積爲級數，而其邊之變率可每變多若干倍，則其多等邊形之面積必漸與平圓之面積相近而以平圓爲限。雖切于圓外之多邊形其邊任變至若何多，其面積總不能等于平圓之面積。然其級數之總數可比平圓之面積所差甚微，其較數之小，可小至莫可名言。

若用此法于圓內容多等邊形，則其多等邊形之面積亦以平圓之面積爲限。總言之，凡平圓之周爲其內容外切多等邊形之限。

乘數 $1 - \frac{1}{n}$ 之類與一相較之差甚小，若 n 愈大，則其差愈微；若令 n 爲任意大，則各乘數可略等于 1，所以得 $\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = 1 - \frac{1}{n} + \frac{1 \cdot 1}{2!} - \frac{1 \cdot 1 \cdot 1}{3!} + \dots$ ①。

曾在代數術第一百七十七款中證 ① 式之右邊爲由函數 e^x 而成。其 e 之同數因爲 $1 - \frac{1}{n}$ ，即訥白爾對數之根也。所以 n 若愈大則 $\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$ 必愈與 e^{-1} 相近，而其限爲 e^{-1} 。

如令 $x = 1$ ，則 $\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$ 之限爲 e^{-1} ，即 $\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n - e^{-1} = 0.718281828462079740080119$ ，故其函數爲常數。

第四款 惟因函數之同數本從變數而生，故變數之同數與函數之長數比則爲 $\frac{x}{e^x - 1} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{12} - \frac{x^4}{720} + \dots$

設函數之式爲 $y = f(x)$ ，令 x 長數爲 h ，而以函數之新同數爲 e^h ，則

辛之各方之倍數，則函數 $\text{戊} = \text{天}^{\text{辛}}$ 之新同數必爲 $\text{戊}' = \text{辛}^1 \text{丁}^2 \text{巳}^3 \text{午}^4 \text{未}^5 \text{申}^6 \text{酉}^7 \text{戌}^8$ 。
母 $\text{辛}^4 \text{丁}^1 \dots$ 。由是知函數之新同數必爲級數，其初項戊爲函數之原同數，其餘各項
爲天之長數辛之各整方，以巳午未申之類爲各倍數，其各倍數皆爲天之別種函數，其
式亦從本函數而生。

由以上各式又可見函數爲 $\text{戊} = \text{天}^{\text{二}}$ 、 $\text{戊} = \text{天}^{\text{三}}$ 、 $\text{戊} = \text{天}^{\text{四}}$ 之類，則其變數與函數之變比例必爲 $\frac{\text{辛}}{\text{戊}^{\text{丁戊}}} = \text{二天}^{\text{一辛}}$ 、 $\frac{\text{辛}}{\text{戊}^{\text{丁戊}}} = \text{三天}^{\text{二一三天辛一辛}}$ 、 $\frac{\text{辛}}{\text{戊}^{\text{丁戊}}} =$

曰天^ニ一六天^ニ辛^一一四天^ニ辛^一一之類。總之若以卯爲天之整指數，則戊^ニ天^一之變比例必爲 $\frac{\text{辛}}{\text{戊}} = \frac{\text{巳}}{\text{一}} \frac{\text{午}}{\text{辛}} \frac{\text{未}}{\text{辛}} \frac{\text{申}}{\text{辛}} \frac{\text{酉}}{\text{辛}} \frac{\text{戌}}{\text{辛}} \dots$ 。由此可見，變數天之長數與函

數^甲之長數其變比例^辛之同數巳午^辛未^二申^三……可分之爲兩^戊

式，其一式爲 \square ，此式與天之長數辛無相關；又一式爲 $\begin{matrix} \text{ナ} & \text{ナ} & \text{ナ} & \text{ナ} & \text{ナ} & \text{ナ} \\ \text{一} & \text{二} & \text{三} & \text{四} & \text{五} & \text{六} \end{matrix}$ ……。

卽 $\left(\begin{matrix} \text{ナ} & \text{ナ} & \text{ナ} & \text{ナ} & \text{ナ} & \text{ナ} \\ \text{一} & \text{二} & \text{三} & \text{四} & \text{五} & \text{六} \end{matrix} : \dots \right)$ 。此式因以辛爲乘數，故辛若變小，其數亦必隨辛而變小。如令辛爲任何小，則此式之數可小至甚近于○。故此數可以不計，而以巳爲變比例之限。

設有繁函數之式 $\text{戊} = \text{甲} \text{上} \text{乙} \text{天} \text{上} \text{丙} \text{天} \text{二}$ ，令天之長數爲辛，則天變爲 $\text{天} \text{上} \text{辛} \text{二}$ 之時，其函數之同數必變爲 戊

$$\left\{ \begin{array}{l} = \text{甲} \text{上} \text{乙} (\text{天} \text{上} \text{辛}) \text{上} \text{丙} (\text{天} \text{上} \text{辛}) \text{二} \\ = \text{甲} \text{上} \text{乙} \text{天} \text{上} \text{丙} \text{天} \text{二} \text{上} (\text{乙} \text{上} \text{二} \text{丙} \text{天}) \text{辛} \text{上} \text{丙} \text{辛} \text{二} \end{array} \right. , \quad \text{故}$$

$$\text{戊}' \text{天} = (\text{乙} \text{上} \text{二} \text{丙} \text{天}) \text{辛} \text{上} \text{丙} \text{辛} \text{二} , \quad \frac{\text{辛}}{\text{戊}' \text{天} \text{戊}} = \text{乙} \text{上} \text{二} \text{丙} \text{天} \text{上} \text{丙} \text{辛} . \quad \text{其乙上二丙天}$$

爲本函數變比例之限。

以此法徧試各種特設之函數，見其皆有相類之性情，所以例設如左。

例曰：命任何自主之變數爲天，而令天之任何函數等于戊，則天變爲 $\text{天} \text{上} \text{辛} \text{二}$ 之時，函數之新同數爲 $\text{戊}' = \text{戊} \text{上} \text{巴} \text{辛} \text{上} \text{午} \text{辛} \text{二} \text{上} \text{未} \text{辛} \text{二} \text{上} \text{申} \text{辛} \text{二} \text{上} \dots\dots$ ，其變數與函數之變比例爲 $\frac{\text{辛}}{\text{戊}' \text{天} \text{戊}} = \text{巴} \text{上} \text{午} \text{辛} \text{上} \text{未} \text{辛} \text{二} \text{上} \text{申} \text{辛} \text{二} \text{上} \dots\dots$ 。此式中之初項巴爲變比例之限，

無論何種函數，其限皆可依此比例求之。

由以上所論變數之長數與函數之長數相關之理，可于算學中開出兩種極廣大極精微之法。

其第一種爲有任何變數之任何函數而求其變數與函數變比例之限。

其第二種爲有任何變數與函數變比例之限而求其函數之原式。

此二種法，若細攷其根源，即奈端所謂正流數、反流數也；亦即來本之所謂微分算術、積分算術也；又即拉果闡諸所謂函數變例也。

論各種函數求微分之公法

第五款 若函數之式爲 $y = f(x)$ ，令天變爲 $x + \Delta x$ ，則函數之新同數必爲 $y' = f(x + \Delta x)$ ，其與原同數之較爲 Δy ，即 $y' - y$ ，此式之初項 y ，名之曰溢率。依同理推之，若函數之式爲 $y = f(x)$ ，令天變爲 $x + \Delta x$ ，則函數之新同數爲 $y' = f(x + \Delta x)$ ，其與原同數之較爲 Δy ，即 $y' - y$ ，其初項 y 爲溢率。

若函數之式爲 $y = f(x)$ ，而天變爲 $x + \Delta x$ ，則函數之新同數與原同數之較爲 Δy ，即 $y' - y$ ，而其溢率爲 Δx 。

總言之，凡天之函數無論爲某方，恆可以 $x + \Delta x$ 代其天，而變其函數之同數爲 $y' = f(x + \Delta x)$ ，乃以原同數減之得 $\Delta y = y' - y$ ，而取其初項 y 爲溢率。

準此推之，則知天之溢率即爲其長數辛。惟因函數之溢率每藉天之長數而生，故微分

術中，恆以 $\frac{1}{x}$ 代天之溢率。其 $\frac{1}{x}$ 號者，非天之倍數，不過是天之溢率耳。溢率之名，本爲流數術中所用。而 $\frac{1}{x}$ 號者，卽微字之偏旁，故微分之術用之。

如有式 $y = x^2$ ，則 $\frac{dy}{dx} = 2x$ 。此式之意謂 y 之微分等于 $2x$ 乘 x 之微分。猶言函數 y 之溢率等于以 $2x$ 乘其 x 之溢率也。如有式 $y = x^3$ ，則 $\frac{dy}{dx} = 3x^2$ 。此式之意謂 y 之微分等于以 $3x^2$ 乘 x 之微分。猶言函數 y 之溢率等于以 $3x^2$ 乘其 x 之溢率也。

第六款 惟因每遇 $y = x^2$ ，則 $\frac{dy}{dx} = 2x$ ，所以可寫之如 $\frac{dy}{dx} = 2x$ 。此爲天微分之

倍數，亦謂之微係數。

又依前法推之，如函數之式爲 $y = x^3$ ，則 $\frac{dy}{dx} = 3x^2$ ，而 $\frac{dy}{dx} = 3x^2$ 。其 $3x^2$ 爲原函數 $y = x^3$ 之微係數。

總言之，無論何種函數之微係數，皆可以 $\frac{dy}{dx}$ 代之。而函數之新同數爲 $y = x^2$ ， $y = x^3$ ， $y = x^4$ ，……，所以 $\frac{dy}{dx} = 2x$ ，其已爲天之他函數，其形每隨函數之式而變。如之 $y = x^2$ 爲何式，則其已之同數卽易求得。

凡函數之欲求微分者，先于其式之左旁作一 \times 號以記之。如有 $[(\text{甲} \perp \text{天})(\text{乙} \neg \neg \text{天} \neg \neg)]$ 式，欲求其微分，則可先作 $\times[(\text{甲} \perp \text{天})(\text{乙} \neg \neg \text{天} \neg \neg)]$ 。

凡函數之欲求微係數者，于其式之左旁作 \times 號，又以 \times 天爲其分母。如有 $[(\text{甲} \perp \text{天})(\text{乙} \neg \neg \text{天} \neg \neg)]$ 式，欲求其微係數，則作 $\frac{\times[(\text{甲} \perp \text{天})(\text{乙} \neg \neg \text{天} \neg \neg)]}{\times \text{天}}$ 。

從以上各款諸說，易知求微分之公法。

法曰：無論天之任何函數，欲求微分，則以 \times 天 \neg 代其原式中之天而詳之。依辛之整方數自小而大序之，取其初有辛之項，而以 \times 天代其辛即得。

如有式 $\text{戊} = \text{甲} \text{天} \perp \text{乙} \text{天} \neg$ ，欲求其微係數，則以 $\text{天} \perp \text{天} \neg$ 代其天，而令函數之新同數

$$\begin{aligned} & \text{爲戊}，則得 \text{戊}' = \left\{ \begin{aligned} &= \text{甲}(\text{天} \perp \text{天} \neg) \perp \text{乙}(\text{天} \perp \text{天} \neg) \neg \\ &= \text{甲} \text{天} \perp \text{乙} \text{天} \neg \perp (\text{甲} \perp \neg \text{乙} \text{天}) \text{天} \perp \text{乙} \text{天} \neg \\ &= \text{戊} \perp (\text{甲} \perp \neg \text{乙} \text{天}) \text{天} \perp \text{乙} \text{天} \neg \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

$\neg \text{乙} \text{天}) \text{天} \neg$ ，以 $\text{天} \perp$ 代其辛，即得 $\text{戊}' = (\text{甲} \perp \neg \text{乙} \text{天}) \text{天} \neg$ ，故其 $\frac{\times \text{天}}{\times \text{戊}} = \text{甲} \perp \neg \text{乙} \text{天}$ 。

第七款 上款之法，必令天變爲 $\text{天} \perp$ ，而詳其函數之同數爲級數，此乃論其立法之理當如是

也。惟求得級數之後，所用者僅爲其辛一方之項，則但能求得此項已足用矣。前于第四款中言此項之倍數爲變數與函數變比例之限，又于第六款中言此項之倍數謂之微係數。然則求函數之微係數與求變數與函數變比例之限，其法本無異也。

如有式 $\text{戊} = \frac{\text{天}}{\text{甲}^2}$ ，則 $\text{戊}' = \frac{\text{天} \text{上} \text{辛}}{\text{甲}^2}$ 。而 $\text{戊} \text{下} \text{戊}' = \frac{\text{天}}{\text{甲}^2} - \frac{\text{天} \text{上} \text{辛}}{\text{甲}^2}$ ，即 $\text{戊} \text{下} \text{戊}' = \frac{\text{天}(\text{天} \text{上} \text{辛})}{\text{下} \text{甲}^2 \text{辛}}$ ，故其變比例之式爲 $\frac{\text{辛}}{\text{戊} \text{下} \text{戊}'} = \frac{\text{天}(\text{天} \text{上} \text{辛})}{\text{下} \text{甲}^2}$ 。惟此式可不待詳爲級數而始得其變比例之限，因可見辛愈小，則其式愈近于 $\frac{\text{天}^2}{\text{甲}^2}$ ，故此式必即爲 $\frac{\text{天}}{\text{甲}}$ 之同數，

所以得 $\text{天} \text{下} \text{戊} = \text{下} \frac{\text{天}^2}{\text{甲}^2 \text{天}}$ 。

若以戊爲任何函數之原同數，而以 $\text{天} \text{上} \text{辛}$ 代其天，則其函數之新同數爲 $\text{戊}' = \text{戊} \text{上} \text{巴} \text{辛} \text{上} \text{午} \text{辛}^2 \text{上} \text{未} \text{辛}^3 \text{上} \dots$ ，即得 $\frac{\text{辛}}{\text{戊}' \text{下} \text{戊}} = \text{巴} \text{上} \text{午} \text{辛} \text{上} \text{未} \text{辛}^2 \text{上} \dots$ 。惟

因 $\frac{\text{辛}}{\text{戊}' \text{下} \text{戊}}$ 之限爲巴，故得 $\frac{\text{天}}{\text{甲}} = \text{巴}$ ，而 $\text{天} \text{下} \text{戊} = \text{巴} \text{天}$ 。

由此得一解曰：凡微分之術，其意專爲求任何變數與函數同時變大之限耳。凡求任何函數之微分，不過將一尋常之代數式另用他法以變化之。因其變化之法與代

第八款 凡變數與函數變比例之限，無論以何數爲主，其形必同。

如戊爲天之函數，若天變爲 $\frac{\text{天}}{1}$ $\frac{\text{辛}}{1}$ ，則戊變爲 $\frac{\text{戊}}{1}$ $\frac{\text{巳}}{1}$ $\frac{\text{辛}}{1}$ $\frac{\text{子}}{1}$ $\frac{\text{未}}{1}$ $\frac{\text{辛}}{1}$ $\frac{\text{土}}{1}$ ……。
其巳、午、未各數俱爲天之他函數，從本函數所生。如令其 $\frac{\text{巳}}{1}$ $\frac{\text{辛}}{1}$ $\frac{\text{子}}{1}$ $\frac{\text{未}}{1}$ $\frac{\text{辛}}{1}$ $\frac{\text{土}}{1}$ ……
…… $\frac{\text{子}}{1}$ ，則天與戊同時變大之數爲辛與子。如依代數術第一百六十三款之法反求
其級數，則得 $\frac{\text{辛}}{1} = \frac{\text{巳}}{1} \frac{\text{子}}{1} \frac{\text{未}}{1} \frac{\text{辛}}{1} \frac{\text{土}}{1} \dots\dots$ ，故其變數與函數之公比例爲 $\frac{\text{子}}{1} = \frac{\text{巳}}{1} \frac{\text{未}}{1} \frac{\text{辛}}{1} \frac{\text{土}}{1} \dots\dots$ 。
 $\frac{\text{巳}}{1} \frac{\text{子}}{1} \dots\dots$ 。故 $\frac{\text{子}}{1}$ 之限爲 $\frac{\text{巳}}{1}$ ，而 $\frac{\text{辛}}{1}$ 之限爲 $\frac{\text{巳}}{1}$ ，此卽 $\frac{1}{1}$ 也。

第九款 由此易知，凡有相等之函數，則其微係數亦必相等。

如戌與亥爲兩函數，而戌 = 亥，其天變爲天_上之時，戌變爲亥，亥變爲亥，則亥 = 亥，而戌 = 亥 = 亥，故 $\frac{\text{戌} \text{ 天}}{\text{亥} \text{ 天}} = \frac{\text{亥} \text{ 天}}{\text{亥} \text{ 天}}$ 。如以巳與午各爲其變比例之限，則巳 = 午。故巳 = 午 = 午，而戌 = 亥。

由此可見，凡函數之式無論如何改形，若其同數無異者，則其微係數必同。如函數之原式爲 $y = x^2 + 1$ ，若改其形爲 $y = (x + 1)^2 - 1$ ，則此式之微係

申^上巳^上辛^上午^上辛^上……，其巳、午爲由未函數所得之天之他函數；其巳、午爲由申函數所得之天之他函數。

再令戊^上 = 未^上申^上，則依法得戊^上 = 未^上申^上 (未^上巳^上申^上巳^上辛^上 (未^上午^上巳^上巳^上申^上)) 辛^上……，以戊代其未^上申^上，移項而以辛約之，則得 $\frac{\text{戊}^{\text{上}}}{\text{戊}^{\text{上}} \text{辛}^{\text{上}}} = \frac{\text{未}^{\text{上}} \text{申}^{\text{上}}}{\text{未}^{\text{上}} \text{巳}^{\text{上}} \text{申}^{\text{上}} \text{巳}^{\text{上}} \text{辛}^{\text{上}}}$

(未^上午^上巳^上巳^上申^上辛^上……)。此式中之未^上巳^上與申^上巳^上兩項乃天之他函數，而與辛無涉者，其餘各項俱有辛之各方爲乘數。設辛爲甚微，則其所乘之衆項亦甚微，故其變比例之限爲 $\frac{\text{戊}^{\text{上}}}{\text{戊}^{\text{上}} \text{辛}^{\text{上}}} = \frac{\text{未}^{\text{上}} \text{巳}^{\text{上}} \text{申}^{\text{上}} \text{巳}^{\text{上}}}{\text{未}^{\text{上}} \text{申}^{\text{上}}}$ 。惟因巳^上 = $\frac{\text{未}^{\text{上}} \text{申}^{\text{上}}}{\text{申}^{\text{上}} \text{巳}^{\text{上}}}$ ，故可

依第六款之法以 $\frac{\text{未}^{\text{上}}}{\text{戊}^{\text{上}}}$ 代其 $\frac{\text{未}^{\text{上}}}{\text{戊}^{\text{上}}}$ ，以 $\frac{\text{申}^{\text{上}}}{\text{戊}^{\text{上}}}$ 代其 $\frac{\text{申}^{\text{上}}}{\text{戊}^{\text{上}}}$ 。則得 $\frac{\text{未}^{\text{上}}}{\text{戊}^{\text{上}}} = \frac{\text{未}^{\text{上}}}{\text{申}^{\text{上}}} \frac{\text{申}^{\text{上}}}{\text{戊}^{\text{上}}}$ ，而 $\frac{\text{申}^{\text{上}}}{\text{戊}^{\text{上}}} = \frac{\text{未}^{\text{上}} \text{申}^{\text{上}}}{\text{申}^{\text{上}} \text{巳}^{\text{上}} \text{申}^{\text{上}} \text{巳}^{\text{上}} \text{辛}^{\text{上}}}$ 。故得專法如左：

凡求同變彼此兩函數相乘積之微分，法將此函數乘彼函數之微分，又將彼函數乘此函數之微分，而以乘得之兩式相加即得。

求多函數連乘積之微分

第十一款 前款論函數之式爲 $\frac{戊}{未母}$ ，則 $\frac{戊}{未母} = \frac{未}{未母} \cdot \frac{戊}{未}$ ，所以 $\frac{戊}{未母} = \frac{未}{未母} \cdot \frac{戊}{未}$ 。

由此推之，如戊爲三箇同變數之函數連乘如 $\frac{未}{未母} \cdot \frac{酉}{酉母} \cdot \frac{亥}{亥母}$ ，可令其母 $= \frac{未}{未母} \cdot \frac{酉}{酉母} \cdot \frac{亥}{亥母}$ ，則亦能爲 $\frac{戊}{未母}$ ，而 $\frac{戊}{未母} = \frac{未}{未母} \cdot \frac{酉}{酉母} \cdot \frac{亥}{亥母}$ 。惟因母 $= \frac{未}{未母} \cdot \frac{酉}{酉母} \cdot \frac{亥}{亥母}$ ，可依同例得 $\frac{戊}{未母} = \frac{未}{未母} \cdot \frac{酉}{酉母} \cdot \frac{亥}{亥母}$ 。

所以 $\frac{戊}{未母} = \frac{未}{未母} \cdot \frac{酉}{酉母} \cdot \frac{亥}{亥母}$ 。若仍將 $\frac{未}{未母}$ 代還其戊而以常法化之，則爲 $\frac{戊}{未母} = \frac{戊}{未母} \cdot \frac{未}{未母} \cdot \frac{酉}{酉母} \cdot \frac{亥}{亥母}$ 。故得專法如左：

凡求同變數之若干函數連乘積之微分，法以各本函數之微分與其餘之各他函數連乘，而以各乘得之式相加卽得。

此法易用以總式以明之。無論其同變數之函數有若干數連乘，皆可以一例推之：

如多函數連乘之式爲 $\frac{未}{未母} \cdot \frac{酉}{酉母} \cdot \frac{亥}{亥母}$ ，則其微分之式爲 $\frac{未}{未母} \cdot \frac{酉}{酉母} \cdot \frac{亥}{亥母} \cdot \left[\frac{未}{未母} \cdot \frac{酉}{酉母} \cdot \frac{亥}{亥母} \right]$ 。

求變數之分函數微分

第十二款 若有分數之式，其母子爲同變數之各函數，則欲得其求微分之專法，可令 $\frac{u}{v}$ 。

則米_二戊_一，而_二米_二戊_一母_一母_二戊_一。乃以其戊之同數_二米_一代其戊，則_二米_二

申^二。故得專法如左……

凡同變量之函數，若爲分數，則求微分之法可將分母乘其分子之微分，乃以分子乘分母之微分減之，而以分母之平方約之。

此法亦可用一總式以明之。

$$\begin{aligned} & \frac{\text{戌}}{\text{戌}} = \frac{\text{申}}{\text{申}}, \quad \text{所以戌} = \frac{\text{亥地}}{\text{申酉}} \text{之微分爲} \frac{\text{戌}}{\text{戌}} \\ & \frac{\text{戌}}{\text{戌}} = \frac{\text{申}}{\text{申}}, \quad \text{由此推之，則戌} = \frac{\text{未申酉}}{\text{亥地}} \text{之微分當爲} \frac{\text{戌}}{\text{戌}} \\ & \frac{\text{戌}}{\text{戌}} = \frac{\text{申}}{\text{申}}, \quad \text{又依第十一款之例，其} \frac{\text{未申酉}}{\text{亥地}} = \frac{\text{未}}{\text{申}} \end{aligned}$$

求變數之分函數微分

而 $\frac{\text{亥地}}{\text{子(亥地)}} = \frac{\text{亥}}{\text{子}} \cdot \frac{\text{地}}{\text{亥地}}$ ，故得 $\frac{\text{戌}}{\text{子戌}} = \frac{\text{未}}{\text{子}} \cdot \frac{\text{申}}{\text{子申}} \cdot \frac{\text{酉}}{\text{子酉}} \cdot \frac{\text{亥}}{\text{子亥}} \cdot \frac{\text{地}}{\text{子地}}$ 。由是知若有分數之函數，其分母分子爲任若干同變數之函數連乘之積如 $\frac{\text{亥地}}{\text{未申酉}}$ 者，可以 $\left(\frac{\text{亥地}}{\text{未申酉}} \right) = \frac{\text{亥地}}{\text{未申酉}} \left[\frac{\text{未}}{\text{子}} \cdot \frac{\text{申}}{\text{子申}} \cdot \frac{\text{酉}}{\text{子酉}} \cdot \frac{\text{亥}}{\text{子亥}} \cdot \frac{\text{地}}{\text{子地}} \right]$ 之式明之。

第十三款 茲欲攷任何函數地之任何乘方求微分之專法。

其地或爲自變之數，或爲他變之函數，皆可。

先設 $\text{戌} = \text{地}^{\text{卯}}$ ，其卯爲任何整數，則其函數之詳式必有卯箇地連乘如 $\text{戌} = \text{地} \cdot \text{地} \cdot \text{地} \cdot \text{地} \cdots \cdots$ 。則依第十一款之例， $\frac{\text{戌}}{\text{子戌}} = \frac{\text{地}}{\text{子地}} \cdot \frac{\text{地}}{\text{子地}} \cdot \frac{\text{地}}{\text{子地}} \cdot \frac{\text{地}}{\text{子地}} \cdots \cdots$ ，其項必有卯數。

故 $\frac{\text{戌}}{\text{子戌}} = \frac{\text{地}}{\text{卯子地}}$ ，而得 $\text{子戌} = \frac{\text{地}}{\text{卯子地}} \cdot \text{戌} = \text{卯地}^{\text{卯}-1} \cdot \text{地}$ 。

設函數爲分指數如 $\text{戌} = \text{地}^{\frac{\text{卯}}{\text{寅}}}$ ，則得 $\text{子戌} = \text{地}^{\frac{\text{卯}}{\text{寅}}}$ 。若依第九款之例，則得 $\text{子戌}^{\text{卯}-1} \cdot \text{子戌} = \text{寅地}^{\text{卯}-1} \cdot \text{子地}$ ， $\text{子戌} = \frac{\text{卯}}{\text{寅}} \times \frac{\text{戌}}{\text{寅地}^{\text{卯}-1}} \cdot \text{子地}$ 。惟因 $\text{戌} = \text{地}^{\frac{\text{卯}}{\text{寅}}}$ ， $\text{戌}^{\text{卯}-1} = \text{地}^{\frac{\text{卯}}{\text{寅}}(\text{卯}-1)}$ ，所以

$\frac{\text{戌}^{\text{卯}-1}}{\text{寅地}^{\text{卯}-1}} = \text{地}^{\frac{\text{卯}}{\text{寅}}(\text{卯}-1)}$ ， $\text{子戌} = \frac{\text{卯}}{\text{寅}} \cdot \text{地}^{\frac{\text{卯}}{\text{寅}}(\text{卯}-1)} \cdot \text{子地}$ 。

再設卯爲負指數，無論爲整數爲分數，則 $x = x^{T_{卯}}$ ，即 $x = \frac{x^{地}}{1}$ 。若依第十二款之例，因其分子爲常數，故其分子之微分當爲0，而得 $x' = \frac{1}{\frac{x^{地}}{x^{T_{卯}-1} \cdot x^{地}}}$ ，即 $x' =$

合觀本款之各式，可見地之指數卯無論爲正爲負爲整爲分，其微分之式必爲 $x' \left(x^{卯} \right) =$

凡求函數乘方之微分，法將其原指數以一減之爲新指數，而以原指數爲其倍數，又以變數之微分乘之即得。惟其原函數若本有常數爲倍數者，則其原倍數必仍在乘數之中。

如函數之式爲 $x = x^{天}$ ，則其微分之式爲 $x' \left(x^{天} \right) = x^{卯} x^{天} x^{T_{卯}-1} \cdot x^{天}$ 。

求函數諸乘方之微分更有簡便之法，可藉代數術第一百六十款與一百六十一款之二項例而得。所以于此不論者，因二項之例亦可由微分而得，余欲用微分之術證明二項之例以便于用，故俟後詳論之。

求變數平方根之微分

用前法已能求各負方之微分，惟因 \sqrt{x} 為微分術中常見之式，所以必更設一最易之專法以便于用。

依本款求諸乘方微分之法， $\frac{1}{n} \left(\frac{x}{x} \right)^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1} = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1}$ ，即 $\frac{1}{n} \left(\frac{x}{x} \right)^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1}$ ，
 即 $\frac{1}{n} \left(\sqrt[n]{x} \right) = \frac{1}{n} \sqrt[n]{x}$ 。所以得專法如左：

凡求函數平方根之微分，法以函數之微分爲實而二倍其原函數之平方根以約之即得。