微观经济学初等笔记

一种团团乱的碎碎念

八里台文理学院
ecoNote Project

空

微观经济学初等笔记

一种团团乱的碎碎念

Nort Silent

八里台文理学院

允公允能 · 日新月异

标　题：微观经济学初等笔记
作　者：Nort Silent
nortsilent@gmail.com
版　次：0.1-r083
发布地点：Google Code
http://econote.googlecode.com
发布时间：2013 年 4 月 5 日
开　本：ISO B5（176 mm × 250 mm）
文 件 名：econote.pdf
排版工具：LaTeX with hyperref
图形制作：TikZ & PGF

致我们终将逝去的青春

空

目录

插图

说明

数学记号

函数变量普遍采用小写斜体字母，例如

$$q_1 = f(p_1, \overline{p}_2, \cdots, \overline{m})$$

其中 q_1、p_1、分别表示作为内生变量的商品 1 的数量和价格，$\overline{p}_2$、$\overline{m}$ 分别表示作为外生变量的商品 2 的价格与消费者收入，$\cdots$ 表示其他未知的变量，$f(\cdot)$ 表示上述变量的函数关系。

经济学量的书写遵循了常见教材的习惯，使用其英文单词首字母缩写进行简记并用大写斜体排版。所有经济学量在被定义或第一次被使用时都会对其英文名以及缩写进行说明，后文使用时一般使用缩写。例如边际成本的英文名为 marginal cost 简记符号为 MC，平均成本的英文名为 average cost，简记符号为 AP。

图表使用

本笔记提供了大量的图示，虽然这种做法有填充版面之嫌，但图表在经济学原理分析中的重要性的的确确是不容忽视的。

在做比较静态分析的时候往往会涉及同一条曲线的移动，本笔记使用同种颜色不同浓度以示区别。其中浅色的表示初始状态的曲线，而同色较深的那支表示当前状态的曲线。例如第11页图（2.6）中浅蓝色曲线 D 表示征税之前的需求曲线，而深蓝色的 D_t 表示收到税收影响的需求曲线。

此外，我采用空心圆圈表示均衡分析中涉及的交点、切点、折点，这与数学习惯中去心邻域是无关的，如第61页图（11.1）位于横轴的空心圆圈 x_1 只表示等产量线 q^* 与横轴的交点。

参考文献

注明出处总是必要的，这是一个好习惯，尊重原创者、为读者提供线索又为自己留足了推卸责任的余地。本书的参考文献均采用页内脚注的形式，毕竟这堆文字并非什么原创的知识体系，能在第一时间给想逃脱的人指明出口也算积德行善了。

在线资源

我所能分享的也只有全书所有图形的源代码，主要的分享对象是高校年轻教师（不是青年教师）。年轻教师的定义是怀着理想的、未收深重污染的、从事教学却又顾家的年轻讲师。希望能为你们节省一点准备课件的时间。

所有的插图均采用 Ti*k*Z & PGF 绘制。我的代码很不凝练，幸好有明确的注释，定性演示的话无需修改。

意见反馈

第 1 章　经济模型

经济数学模型一般是用由一组变量所构成的方程式或方程组来表示的，变量是经济模型的基本要素。变量可以被区分为内生变量、外生变量和参数。在经济模型中，内生变量指该模型所要决定的变量。外生变量指由模型以外的因素所决定的已知变量，它是模型据以建立的外部条件。

内生变量可以在模型体系内得到说明，外生变量决定内生变量，而外生变量本身不能在模型体系内得到说明。参数指数值通常不变的变量，也可以理解为可变的常数。参数通常是由模型以外的因素决定的，参数也往往被看成是外生变量。

经济模型可以被区分为静态模型和动态模型。从分析方法上讲，与静相联系的有静态分析方法和比较静态分析方法，与动态模型相联系的是动态分析方法。

仍以上面的均衡价格决定模型为例。在该模型中，当需求函数和供给的外生变量 α、β、δ 和 γ 被赋予确定数值以后，便可求出相应的均衡价 $\bar{P}$ 均衡数量 $\bar{Q}$ 的数值。这种根据既定的外生变量值来求得内生变量值的分析方法，静态分析。

在上述的均衡价格决定模型中，当外生变量 α、β、δ 和 γ 被确定为不同的数值时，由此得出的内生变量 $\bar{P}$ 和 $\bar{Q}$ 的数值是不相同的。很显然，在一个经济模型中，当外生变量的数值发生变化时，相应的内生变量的数值也会发生变化这种研究外生变量变化对内生变量的影响方式，以及分析比较不同数值的外生变量下的内生变量的不同数值，被称为比较静态分析。

1.1　问题总结

1. 为什么价格在纵轴，商品数量在横轴

按照曼昆同志的说法我们都是马歇尔的学生，他老当初就是这么画的，我们也就因袭下来了。类似的表达在克鲁格曼和帕森斯那里也可以找到。[1]

2. 经济学的研究对象

以市场为资源配置基本方式的经济系统的构成要素家庭或者消费者与厂商或者生产者之间的联系：产品市场和生产要素市场把家庭或者消费者与厂商或者生产者联系起来，共同构成一个有机的经济系统。

3. 微观经济学一个基本的假设条件

以市场为资源配置基本方式的经济系统的构成要素家庭或者消费者与厂商或者生产者之间的联系：产品市场和生产要素市场把家庭或者消费者与厂商或者生产者联系起来，共同构成一个有机的经济系统。

定义 (理性人) “合乎理性的人”简称“理性人”或者“经济人”，这种假设是对在经济社会中从事经济活动的所有人的基本特征的以一个一般性的抽象。其基本特征是：每一个从事经济活动的人都是利己的。或者说：每一个从事经济活动的人所采取的行为都是力图以自己最小的经济代价去获得最大的经济利益。经济学家认为在任何经济活动中，只有这样的人才是“合乎理性的人”。 ■

推荐阅读

1. 杰克・赫舒拉发, 阿米亥・格雷泽, 大卫・赫舒拉发. 价格理论及其应用：决策、市场与信息 [M]. 李俊慧, 周燕, 译. 第 7 版. 北京: 机械工业出版社, 2009.

2. Varian, H. R. (1997). How to Build an Economic Model in Your Spare Time. *The American Economist*, 41(2), 3–10.

第 2 章　市场与供求

这一章往往作为经济学原理的第一章，凭空抛给我们商品数量和价格的关系，均衡的概念，静态分析和比较静态分析的手段。紧接着我们便开始课上打瞌睡，课下发文唾弃经济学。听到最多的是“不就是”、“怎么能”、“现实的”，看到最多的是“骗人”、“扯淡”、“颠覆”……似乎再刻薄的言语都无法表达我们看破经济学本质之后吐烟圈看浮云的成就感。孰对孰错？我真不知道。咱不是能断人生死对错的圣君。

有一点是可以肯定的，价格、需求、供给这种词汇太世俗化了，无论你对他做多少学科内的界定都无法消除人们对它的惯常理解。远非动量、模量来的冷飕飕硬邦邦。

2.1　需求

1. 消费者对价格的反映

一种商品的需求是指消费者在一定时期内在各种可能的价格水平愿意而且能够购买的该商品的数量。这个数量即需求量。 需求

可见需求描述了需求量和影响需求数量的诸因素之间的关系。

- 一定时期：需求量 q 值得是某时期内的需求量，如每月、每季度；此外这个时期不能太长，在这个时期内外生变量是稳定不变的；
- 价格水平：我的理解这里的价格水平是按照拍卖市场拍卖人喊价对应的；
- 愿意购买：通过后续学习我们知道这一点对应的是偏好或显示偏好；
- 能够购买：这一点对应后续章节的预算约束。

所谓需求函数是表示一种商品的需求数量和影响该需求数量的各种因素之间的相互关系。 需求函数

所谓需求函数是表示一种商品的需求数量和影响该需求数量的各种因素之间的相互关系。 需求表

以 q_i 表示某种商品的需求量，p_i 表示其价格水平，$p_j\ (j=1,2,\cdots,\ j\neq i)$ 表示其他商品的价格，则广义的需求函数可以表示为

$$q_1 = f(p_1, p_2, \cdots, m) \tag{2-1}$$

需求函数只是试图用数学记号的方法将需求（需求量—价格水平）表示出来而已。

这种假设是对在经济社会中从事经济活动的所有人的基本特征的以一个一般性的抽象。

“合乎理性的人”简称“理性人”或者“经济人”，这种假设是对在经济社会中从事经济活动的所有人的基本特征的以一个一般性的抽象。其基本特征是：每一个从事经济活

动的人都是利己的。或者说：每一个从事经济活动的人所采取的行为都是力图以自己最小的经济代价去获得最大的经济利益。经济学家认为在任何经济活动中，只有这样的人才是“合乎理性的人”，否则，就是非理性的人。

需求曲线 草稿：一种商品的需求是指消费者在一定时期内在各种可能的价格水平愿意而且能够购买的该商品的数量[①]。

2. 需求函数

3. 保留价格

保留价格 保留价格指的是消费者愿意为某种产品或服务付出的最高价格，或者生产者所能接受的某种商品或服务的最低价格。保留价格通常应用在拍卖行为中，在微观经济学中冲用来结合均衡价格测度消费者剩余或生产者剩余。

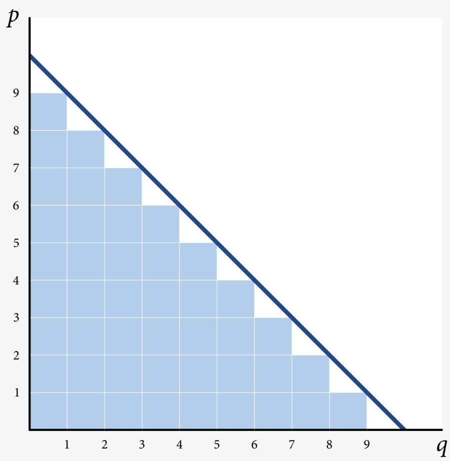


图 2.1: 保留价格与需求曲线

草稿：利润最大化的产量点，收益曲线的切线与成本曲线的切线是平行的，还要排除 $C > R$ 的点。注意：图示中产品价格是固定的，故而收益曲线为直线。

4. 市场需求曲线

若市场上有 n 个需求者，其个人需求函数为 $q_i = D_i(p)$，则在价格水平 p 时市场需求量为：

$$q = q_1 + q_2 + \cdots + q_n = \sum_{i=1}^{n} q_i \tag{2-2}$$

市场需求函数为：

$$q = D_1(p) + D_2(p) + \cdots + D_n(p) = \sum_{i=1}^{n} D_i \tag{2-3}$$

这里只提到一个题目[②]“价格下降需求量沿着个人（市场）需求曲线斜向下运动，其原因是（1）低价令消费者增加购买该种商品；（2）价格下降时，消费者进入市场”。

如果题干说的是个人需求曲线那么原因为（1），因为某消费者 (q, p) 沿个人需求曲线运动只反映他对该商品需求量的增减变动，没有也无法退出市场；如果题干说的是市场

① 关于需求曲线（以及后文的供给曲线等）为什么把“自变量”价格和“应变量”数量请参考：Gordon, S. (1982). Why Did Marshall Transpose the Axes? *Eastern Economic Journal*, 8(1), 31–45.

② 哈里森, 贝斯. 斯蒂格利茨《经济学》习题集 [M]. 王则柯, 译. 第 2 版. 北京: 中国人民大学出版社, 1998: 48.

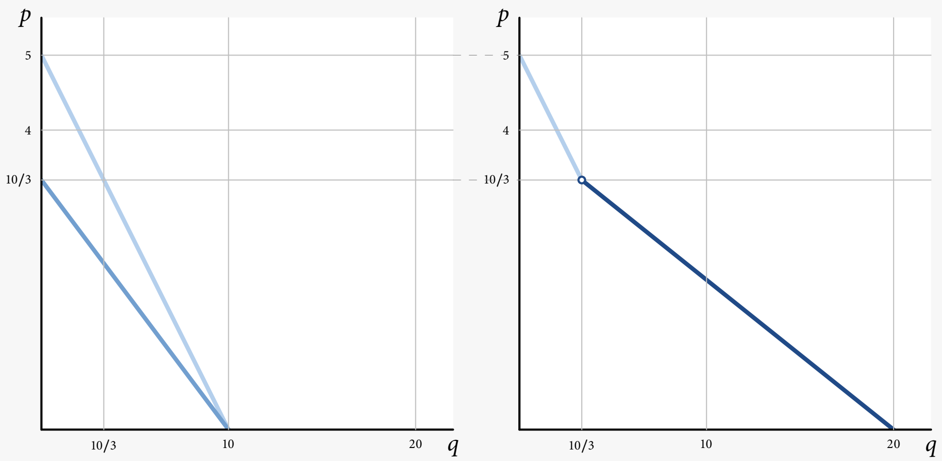


图 2.2: 市场需求曲线的加总 $D_1 + D_2 \to D$

需求曲线那么原因为（1）和（2），因为作为个人需求曲线的加总，市场需求量的变化既可能来源于某些消费者个人需求量的变化，也可能是某些消费者进入退出该商品市场而带来的总量变化。

2.2 供给曲线

1. 供给量与价格的关系

一种商品的供给是指生产者在一定时期内在各种可能的价格下愿意并且能够提供出售的该种商品的数量。 供给

2. 市场供给曲线

若市场上有 n 家企业，其生产函数为 $q_i = S_i(p)$，则在价格水平 p 时市场供给量为：

$$q = q_1 + q_2 + \cdots + q_n = \sum_{i=1}^{n} q_i \tag{2-4}$$

市场供给函数为：

$$q = S_1(p) + S_2(p) + \cdots + S_n(p) = \sum_{i=1}^{n} S_i \tag{2-5}$$

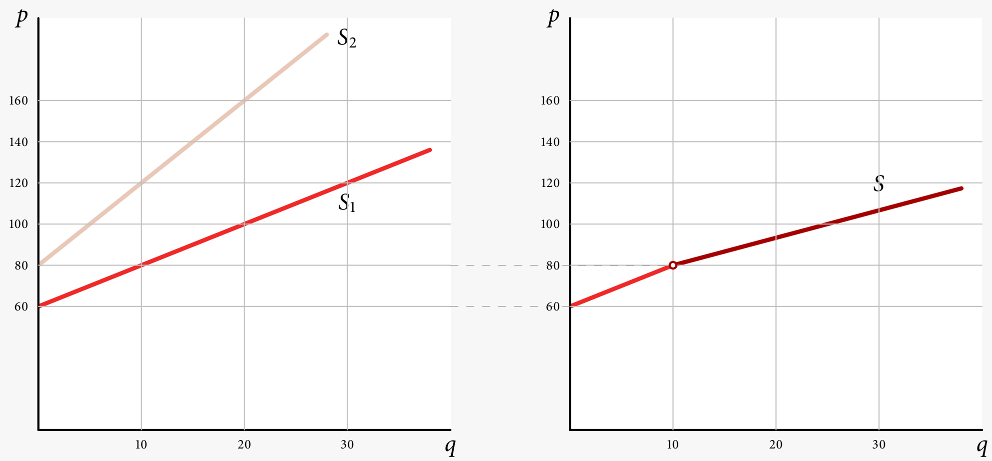


图 2.3: 市场供给曲线的加总 $S_1 + S_2 \to S$

当 $0 \le p \le 60$ 时，$q = 0$ 的部分没有画出。

2.3　弹性

1. 差商和导数

定义 (变化率（割线斜率）) 表示因变量对自变量变化的比率。即当一个经济变量发生 1 单位的变化时，由它引起的另一经济变量变化的数量：$\Delta y/\Delta x$，单位为（因变量单位 / 自变量单位）。■

2. 弹性（一元函数）

弹性和导数类似，描述了函数变量变化的关系，任何两个相关的变量都可以找到他们的弹性关系。某些弹性概念例如要素替代弹性（第48页）所描述的经济学量变化关系并非那么直接明显，然而就像导数的意义一样，他们都是对上一阶变量的描述，只要对上一阶变动的研究有贡献即可。

定义 (弹性) 表示因变量对自变量反应的敏感程度。即当一个经济变量发生 1% 的变化时，由它引起的另一经济变量变化的百分比。它和变量所用的单位无关，分为点弹性和弧弹性。■

下面我们来分析弹性的定义，设一元函数

$$y = f(x)$$

当 $x \to x + \Delta x$ 时，$y \to y + \Delta y$。x 的变动比例为 $\Delta x/x$，y 的变动比例为 $\Delta y/y$。

如果 $f(x)$ 在 x 处不可导，则 x 点的弹性为

$$\varepsilon = \frac{\Delta y}{y}\bigg/\frac{\Delta x}{x} = \frac{\Delta y}{\Delta x}\cdot\frac{x}{y} = \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}\cdot\frac{x}{f(x)} \tag{2-6}$$

如果 $f(x)$ 在 x 处可导，则 x 点的弹性为

$$\varepsilon = \lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}\cdot\frac{x}{f(x)}\right) = f'(x)\frac{x}{y} \tag{2-7}$$

即该点的斜率与平均数的比值。可导函数的弹性还可以方便的转换为对数形式的弹性

$$e = \frac{d\ln f(x)}{d\ln x} \tag{2-8}$$

其中 $x, f(x) > 0$，一般的经济量都满足这个条件。

定义 (弧弹性) 表示当自变量由一点 a 变化到另一点 b 时（两点间），因变量对自变量反应的敏感程度。如式（2-6）。 ■

其中 (x_a, y_a) 指的总是起点，所以这种弹性计算方法也可以称为起点基数法。以需求函数为例，在商品价格变化一定幅度时，涨价时的弹性和降价时的弹性所选起点是不同的，弹性也会不同。

弧弹性计算的最佳算术平均数法是取变量起点和终点的算术平均数值作为分母，即

$$\varepsilon = \frac{\Delta y}{(y_1 + y_2)/2} \bigg/ \frac{\Delta x}{(x_1 + x_2)/2} = \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \frac{x_1 + x_2}{y_1 + y_2} \tag{2-9}$$

弧弹性计算的最佳定义公式法是以差分来近似微分，计算方法如下

$$\varepsilon = \frac{\Delta \ln y}{\Delta \ln x} = \frac{\ln y_2 - \ln y_1}{\ln x_2 - \ln x_1} = \frac{\ln(y_2/y_1)}{\ln(x_2/x_1)} \tag{2-10}$$

以上三种弧弹性计算方法中，起点计数法最简便也最不精确，算术平均数法相比之下较为精确也很简便，最佳定义公式法是以差分来近似微分，在变化量不大的情况下是最好的方法。

草稿：类似离散数据的边际量计算，应该用高区间、低区间的概念引入中点弧弹性。

还可以看到一个问题，弧弹性的计算总是依赖于已知的端点数据，也就是说弧弹性公式仅能作为计算公式。而教科书上“需求的价格弹性为 2，则价格上涨 1% 后需求量将下降 2%”的表达方式是本末倒置的，只能说“价格上涨 1% 后需求量将下降 2%，是因为需求的价格弹性为 2”。用来对因变量变动趋势进行预测的应该是点弹性。

定义 (点弹性) 表示当自变量变化趋于无穷小时，因变量对自变量反应的敏感程度。如式（2-7）。 ■

以需求曲线为例，我们只能说在 $e_D = 1$ 处价格和需求量变动“极小”的情况下，其变动比例趋向于 1，而不能举一个“很小”的例子去验证它——即便对于某些需求曲线这种举例的结果可以与点弹性数值吻合——理论基础上仍是违背的。

有的教科书在明确区分了倒数和弹性的联系和差别之后，仍用曲线陡峭或平坦来作为弹性判别依据是不恰当的。如果辅助上“过同一点的两条曲线，……”，道理很正确也很废话。

定义 (需求的价格弹性) 需求的价格弹性表示在一定时期内一种商品的需求量变动对于该商品价格变动的反应程度。或者说，表示在一定时期内当一种商品的价格变动 1% 时所引起的该商品的需求量变动的百分比。

$$e_d = \frac{dq_d}{dp} \cdot \frac{p}{q_d} \tag{2-11}$$

■

定义 (供给的价格弹性) 在一定时期内，一种商品的供给量变动对于该商品价格变动的反应程度。即当价格变动 1% 时，该商品的供给量变动的百分比。 ■

可以表示为：

$$e_s = \frac{dq^s}{dp} \cdot \frac{p}{q^s} \tag{2-12}$$

3. 弹性（多元函数）

如式（2-1）表示的那样，一种商品的需求量与其他商品价格以及消费者收入都存在着普遍联系，研究他们之间的弹性关系便要使用多元函数偏弹性的方法。

设多元函数 $y = f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，则 y 对某一自变量 x_i $(i = 1, 2, \cdots, n)$ 的弹性可以这样表示：

1. 若函数不可导，则

$$\varepsilon_i = \frac{\Delta f(\cdot)}{\Delta x_i} \cdot \frac{x_i}{f(\cdot)} \tag{2-13}$$

2. 若函数可导，则

$$\varepsilon_i = \frac{\partial f(\cdot)}{\partial x_i} \cdot \frac{x_i}{f(\cdot)} \tag{2-14}$$

3. 对于多元幂函数可以使用对数法求偏弹性

$$\varepsilon_i = \frac{\partial \ln f(\cdot)}{\partial \ln x_i} \tag{2-15}$$

定义 (需求的交叉价格弹性) 在一定时期内，一种商品的需求量变动对于相关商品价格变动的反应程度。即当相关商品价格变动 1% 时，该商品的需求量变动的百分比。 ■

可以表示为：

$$e_{XY} = \frac{dq_X}{dp_Y} \cdot \frac{p_Y}{q_X} \tag{2-16}$$

定义 (替代品) 如果两种商品可以相互替代以满足消费者的同一种欲望，那么他们互为替代品。他们的需求交叉价格弹性 $e_{XY} < 0$。 ■

定义 (互补品) 如果两种商品必须同时使用，才能满足消费者的某种欲望，那么这两种商品为互补品。他们的需求交叉价格弹性 $e_{XY} < 0$。 ■

- 当 $e_{XY} > 0$ 时，两种商品互为替代品；
- 当 $e_{XY} < 0$ 时，两种商品为互补品；
- 当 $e_{XY} = 0$ 时，两种商品不存在相关关系。

定义 (需求的收入弹性) 在一定时期内，一种商品的需求量变动对于消费者收入变动的反应程度。即当消费者收入变动 1% 时，该商品的需求量变动的百分比。 ■

可以表示为：

$$\eta = \frac{dq}{dm} \cdot \frac{m}{q} \tag{2-17}$$

- 当 $\eta < 0$ 时，说明该商品是低档品（或劣等品）；
- 当 $\eta > 0$ 时，说明该商品是正常品[①]；

① 这里使用 η 来判断商品是低档品还是正常品有些过于严格了，使用 dq/dm 即可，因为 m/q 总是正数。

- 当 $0<\eta<1$ 时，说明该商品是必需品。
- 当 $\eta>1$ 时，说明该商品是奢侈品；

定义 (恩格尔定律) 在一个家庭或一个国家中，食物支出在收入中所占的比例，随着收入的增加所减少。即，在一个家庭或一个国家中，富裕程度越高，食物的支出的收入弹性越小；反之越大。 ■

4. 需求价格弹性系数定价法[①]

产品在市场上的供求变动关系，实质上体现在价格的刺激和制约作用上。需求增大导致价格上升，刺激企业生产；而需求减少，则会引起价格下降，从而制约了企业的生产规模。从另一个角度看，企业也可以根据这种关系，通过价格的升降来作用于市场需求。运用需求价格弹性系数确定产品的销售价格时，其基本计算公式为：

$$p=\frac{p_0q_0^{\alpha}}{q^{\alpha}} \tag{2-18}$$

式中：p_0 为基期单位产品价格，q_0 为基期需求量，ε 为某种产品的需求价格弹性系数，p 为单位产品价格，q 为预计销售数量，α 为需求价格弹性系数绝对值的倒数，即 $\frac{1}{|\varepsilon|}$。

由需求的价格弹性公式（2-11）整理得：

$$\frac{dq}{q}=-\varepsilon\frac{dp}{p}$$

解微分方程得：

$$p^{\varepsilon}q=k,\quad \text{其中 } k \text{ 为积分常数}$$

定价点 (q,p) 和基期 (q_0,p_0) 都满足上面这个“需求函数”，有：

$$p^{\varepsilon}q=k=p_0^{\varepsilon}q_0$$

整理得需求价格弹性系数定价公式：

$$p=\frac{p_0q_0^{\alpha}}{q^{\alpha}},\quad \alpha=1/\varepsilon.$$

5. 线性函数的价格弹性

假设线性需求函数形如 $q=\alpha-\beta p$，其中 α、$\beta>0$。则其价格弹性为：

$$\varepsilon=\frac{-\beta p}{\alpha-\beta p} \tag{2-19}$$

可见：线性需求函数的点弹性总为负数，其变化范围为 $(-\infty,0]$，当 $p=\frac{\alpha}{2\beta}$ 即 $q=\frac{\alpha}{2}$ 时 $\varepsilon=-1$。如图（2.4）所示，该点位于“需求线段”的中点。

假设线性供给函数形如 $q=-\delta+\gamma p$，其中 δ、$\gamma>0$。则其价格弹性为：

$$\varepsilon=1+\frac{\delta}{-\delta+\gamma p}=1+\frac{\delta}{q} \tag{2-20}$$

---

① 财政部会计资格评价中心. 财务管理：中级会计资格 [M]. 北京: 中国财政经济出版社, 2009：190–191.

可见：该供给函数的点弹性总是大于 1 的，当 $q \to +\infty$ 时，$\varepsilon \to 1$。如图（2.5）所示，供给曲线上任意点 A 的价格弹性可以表示为：

$$\varepsilon = \frac{dq}{dp} \cdot \frac{p}{q} = \frac{p}{q} \Big/ \frac{dp}{dq} = \frac{A}{\,} \tag{2-21}$$

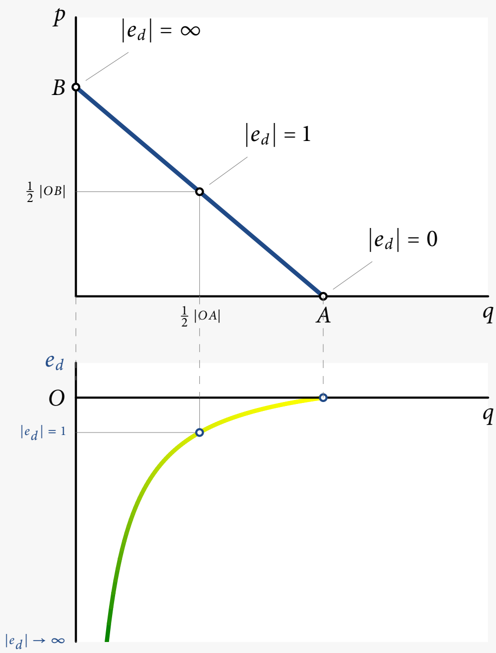


图 2.4: 一般的线性需求函数

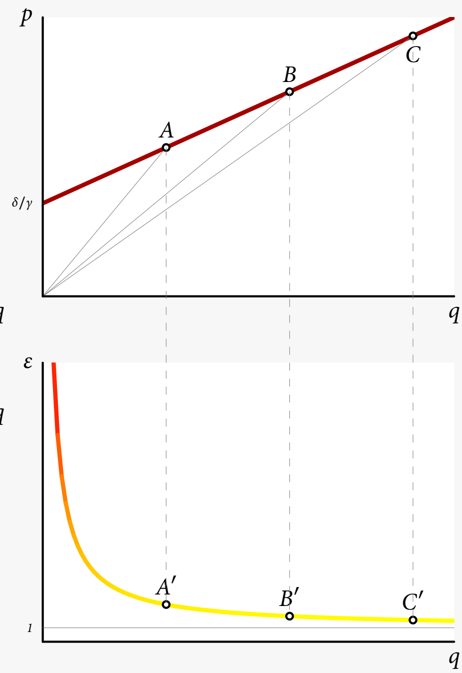


图 2.5: 一般的线性供给函数

2.4　市场均衡与供求关系

定义 (均衡价格（数量）) 一种商品的均衡价格是指该种商品的市场需求量和市场供给量相等时的价格，与此对应的供求数量成为均衡数量。 ■

定义 (需求量的变动) 指在其他条件不变时，由某种商品的价格变动所引起的该商品的需求数量的变动。表现为沿着需求曲线移动：一个点 (p_a, q_a) 沿着需求曲线移动至另一个点 (p_b, q_b) 后，商品（需求）数量发生了 $q_b - q_a$ 的变动。 ■

定义 (需求的变动) 指在某商品价格不变的条件下，由于其他因素变动所引起的该商品的需求数量的变动。表现为需求曲线整体变动：需求函数 $D_1(p, q) = 0$ 变为 $D_2(p, q) = 0$ 之后，整条需求曲线形态、位置的变化。 ■

定义 (供给量的变动) 指在其他条件不变时，由某种商品的价格变动所引起的该商品的供给数量的变动。表现为沿着供给曲线移动：一个点 (p_a, q_a) 沿着供给曲线移动至另一个点 (p_b, q_b) 后，商品（供给）数量发生了 $q_b - q_a$ 的变动。 ■

定义 (供给的变动) 指在某商品价格不变的条件下，由于其他因素变动所引起的该商品的供给数量的变动。表现为供给曲线整体变动：供给函数 $S_1(p,q)=0$ 变为 $S_2(p,q)=0$ 之后，整条供给曲线形态、位置的变化。■

规律 (供求定理) 在其他条件不变的情况下，需求变动分别引起均衡价格和均衡数量的同方向变动；供给变动引起均衡价格的反方向变动，引起均衡数量的同方向变动[①]。任何商品的价格都会自动调整以使得该商品的供求数量平衡[②]。■

2.5 税收和补贴

税收分配上的两个主要概念：(1) 法定归属：谁在法律上负责纳税；(2) 经济归属：指税收引起的私人实际收入分配的变化。

课税对象无关性定理：竞争性市场中，税收对价格和产出的效应，与对供给者还是需求者进行征税无关。

补贴与税收对市场的影响是相反的。

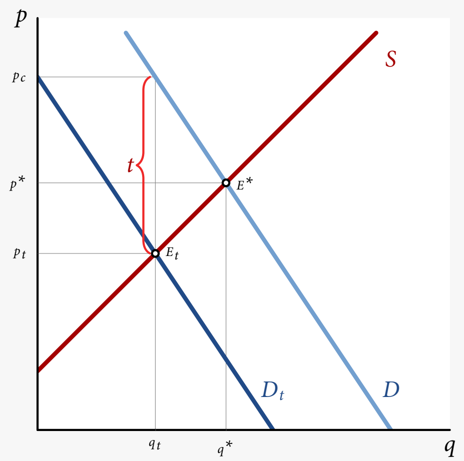


图 2.6: 从量税对供求的影响

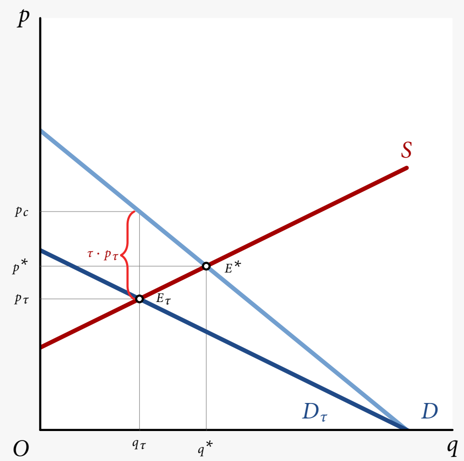


图 2.7: 税收对供求均衡的影响

$$
\begin{cases} q_d = \alpha - \beta p \\ q_s = -\delta + \gamma p \\ q_d = q_s \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p = \dfrac{\alpha+\delta}{\beta+\gamma} \\ q = \dfrac{\alpha\gamma-\beta\delta}{\beta+\gamma} \end{cases} \tag{2-22}
$$

① 高鸿业. 西方经济学：微观部分 [M]. 5 版. 北京: 中国人民大学出版社, 2010: 24.

② 曼昆. 经济学原理：微观经济学分册 [M]. 梁小民, 译. 5 版. 北京: 北京大学出版社, 2009: 85.，译本原文是“任何一种物品价格的调整都会使该物品的供给与需求达到平衡”，英文原文为“The price of any good adjusts to bring the quantity supplied and quantity demanded for that good into balance.”

政府征税之前买卖双方的成交价格是相等的，即消费者支付的总价完全交付给生产者；政府征税之后买卖双方的价格便不再相等，即消费者既要向生产者支付一定的净价，还要向政府交纳一定量或一定比例的税收。

1. 从量税

从量税即对每单位消费品征收定额（t 元）的税收，使买方支付的价格（总价 p^+）与卖方获得的价格（净价 p^-）之间存在着差距 t：

$$p^+ \equiv p^- + t \tag{2-23}$$

根据课税对象无关性，法定的纳税人是买方或是卖方对结果是无影响的，为方便起见我们假设买方是法定的纳税人。结果是导致原有的需求曲线向下平移 t 单位。这时需求曲线变为：

$$q_d = \alpha - \beta(p^+ + t) \quad \text{或} \quad p^+ = -\frac{q_d}{\beta} + \frac{\alpha}{\beta} - t \tag{2-24}$$

其几何意义为需求曲线 D 向下平移 t 单位，新的均衡价格为 $p = \frac{\alpha+\delta-\beta t}{\beta+\gamma}$，均衡数量为 $q = \frac{\alpha\gamma-\beta\delta-\beta\gamma t}{\beta+\gamma}$。

结论：课征从量税减少了均衡数量，提高了消费者支付价格，降低了生产者获得的净价格。

2. 从价税

在现有市场均衡下，对买方支付的总价收取固定税率（τ）的税收：

$$p^+(1-\tau) \equiv p^- \tag{2-25}$$

或者向卖方获得的净价 p^- 收取固定比例 t 的税收：

$$p^+ \equiv p^-(1+t) \tag{2-26}$$

为方便起见我们仍假设买方是法定的纳税人，需求曲线将以其与 q 轴的交点为圆心逆时针旋转，形成新的需求曲线：

$$q_d = \alpha - \beta(1-\tau)p^+ \quad \text{或} \quad p^+ = -\frac{q_d}{\beta(1-\tau)} + \frac{\alpha}{\beta(1-\tau)} \tag{2-27}$$

在竞争性市场中，课征同样收入的从价税（税款是价格的固定百分比）和从量税（税款是所购每个单位商品的固定数量）对产出具有同样的效应。税收归宿由供求弹性决定。

3. 实物税

某岛国国民对椰子的需求函数为 $D(p) = 1200 - 100p$，当地椰子的供给 $S(p) = 100p$。（1）若法律规定国民每消费一个椰子就必须付给国王一个椰子，然后国王把他得到的椰子都吃掉，求该岛国的椰子产量；（2）如果国王选择将所有得到的椰子都在当地市场上以市场价格进行出售，求新均衡时的椰子产量？

4. 税收分配与价格弹性

如果供求函数都是线性函数，我们可以利用图（2.7）对税收分配和弹性的关系进行简单的分析。对于非线性的供求函数我们可以通过微分法对税前均衡即税后变化趋势进行分析。

假设市场处于均衡状态 (p^*, q^*)，征收从量税 t 的情况下，无论征税对象是卖方还是卖方，总有：

$$p_d = p_s + t \tag{2-28}$$

$$q_d(p_d) = q_s(p_s) \tag{2-29}$$

其中 p_d 是消费者实际支付价格，p_s 为生产者实际收到价格。对式 (2-28)、式（2-29）取微分得：

$$dp_d = dp_s + dt \tag{2-30}$$

$$\frac{dq_d}{dp_d} \cdot dp_d = \frac{dq_s}{dp_s} \cdot dp_s \tag{2-31}$$

将式（2-30）带入式（2-31），得到

$$\frac{dq_d}{dp_d}(dp_s + dt) = \frac{dq_s}{dp_s} \cdot dp_s$$

整理得

$$(\frac{dq_d}{dp_d} - \frac{dq_s}{dp_s})dp_s = -\frac{dq_d}{dp_d}dt \tag{2-32}$$

为了考虑税收对初始均衡 (p^*, q^*) 的影响，尤其是税收分配与初始均衡点的弹性关系，我们对式（2-32）两侧同时乘以 p^*/q^*：

$$(\frac{dq_d}{dp_d}\frac{p^*}{q^*} - \frac{dq_s}{dp_s}\frac{p^*}{q^*})dp_s = -\frac{dq_d}{dp_d}\frac{p^*}{q^*}dt$$

通过上述变换我们构造出税前均衡点的点弹性，进一步改写为：

$$(e_d - e_s)dp_s = -e_d dt$$

其中 e_d 是税前均衡状态下需求的价格弹性，e_s 为供给的价格弹性。进一步变换为：

$$\frac{dp_s}{dt} = -\frac{e_d}{e_d - e_s}, \text{ 或 } \frac{dp_s}{dt} = -\frac{|e_d|}{|e_d| + e_s} \tag{2-33}$$

同理可推得需求价格与税收的关系，或直接联合式（2-28）与式（2-33）可得：

$$\frac{dp_d}{dt} = \frac{e_s}{e_s - e_d}, \text{ 或 } \frac{dp_d}{dt} = \frac{e_s}{|e_d| + e_s} \tag{2-34}$$

2.6 限制价格

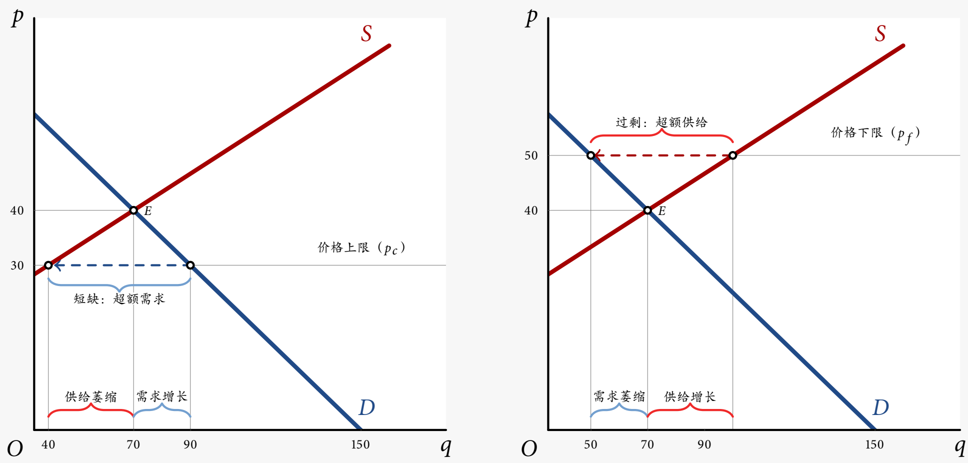
1. 价格上限

在现有市场均衡下，政府设置低于现有均衡价格的价格上限，导致出现超额需求（消费者需求量大于生产者供给量）。如果政府想维持这个有效的限制价格，需设法补足消费者的超额需求（例如由其他市场购入），否则将出现黑市交易使得价格上限形同虚设。

如图（2.8a），某市场[①]供给函数 $q^S = -50 + 3p$，需求函数 $q_d = 150 - 2p$，市场均衡价格为 40 元，均衡数量为 70 单位。若政府要维持价格为 30 元**不变**，并以 40 的元价格购进其他市场产品后以 30 投放本地市场，请问需要购买多少产品，净耗资几何？

---

① 来自人大经济论坛：http://bbs.pinggu.org/thread-1273632-1-1.html



(a) 价格上限　　(b) 价格下限

图 2.8: 限制价格对供求均衡的影响

2. 价格下限

结论：有效地价格上限压低价格，而有效的价格下限则抬高价格。两种情况下的交易量都少于无管制时的均衡数量。如果价格下限得到愿意积累存货的“最后买家”的支持，供给量会大于无管制时的均衡数量。

2.7 禁止供给

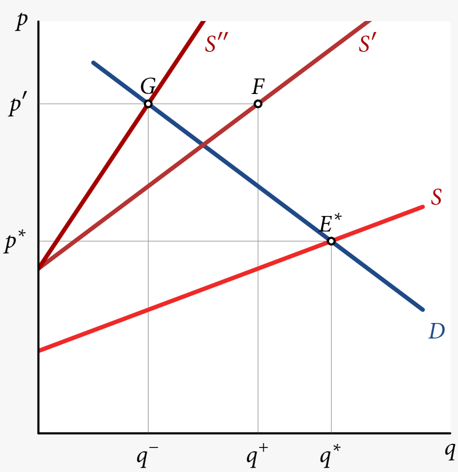


图 2.9: 禁止供给

草稿：有效地价格上限压低价格，而有效的价格下限则抬高价格。两种情况下的交易量都少于无管制时的均衡数量。如果价格下限得到愿意积累存货的“最后买家”的支持，供给量会大于无管制时的均衡数量。

2.8 配给制度

推荐阅读

1. 杰克・赫舒拉发, 阿米亥・格雷泽, 大卫・赫舒拉发. 价格理论及其应用：决策、市场与信息 [M]. 李俊慧, 周燕, 译. 第 7 版. 北京: 机械工业出版社, 2009: 35–43. ➠ 该书关于交易税和价格限制的分析相当详细，其分析交易税时所用的“增加法”与“取走法”对于丰富思考很有意义。

2. 黎诣远. 西方经济学（微观经济学）[M]. 北京: 高等教育出版社, 2007.

3. 黎诣远. 西方经济学（微观经济分析）[M]. 北京: 清华大学出版社, 1987.

空

第 3 章　预算约束

3.1　预算线

定义 (预算线) 又称为预算约束线、消费可能线或价格线，表示在消费者收入和商品价格既定的条件下，消费者用全部收入所能买到的两种商品的全部组合。 ■

预算等式可以表示为，

$$m = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \cdots + x_n p_n = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$$

任何 $\vec{P}\vec{X} \leq m$ 的预算组合都是消费者有能力承担的。特殊地，两种商品 X、Y 的预算线表示为：

$$m = x p_x + y p_y \tag{3-1}$$

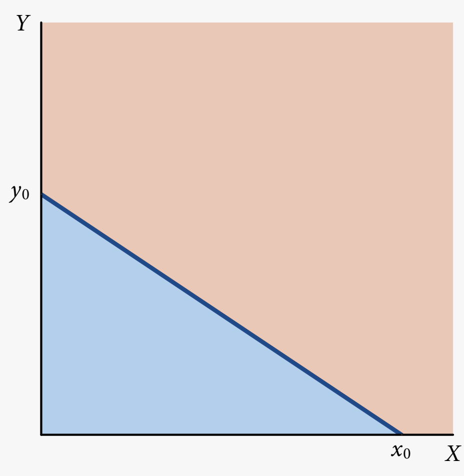


图 3.1: 预算线和预算集

蓝色区域中的预算束花费小于收入，是消费者有能力购买的；红色区域中的预算束花费大于收入，是消费者无力购买的；蓝色边界 $m = xp_X + yp_Y$ 恰好将收入消费净尽，即为预算线。

为什么只研究两种商品？组合商品的概念和合理性。

3.2　收入变化对预算集的影响

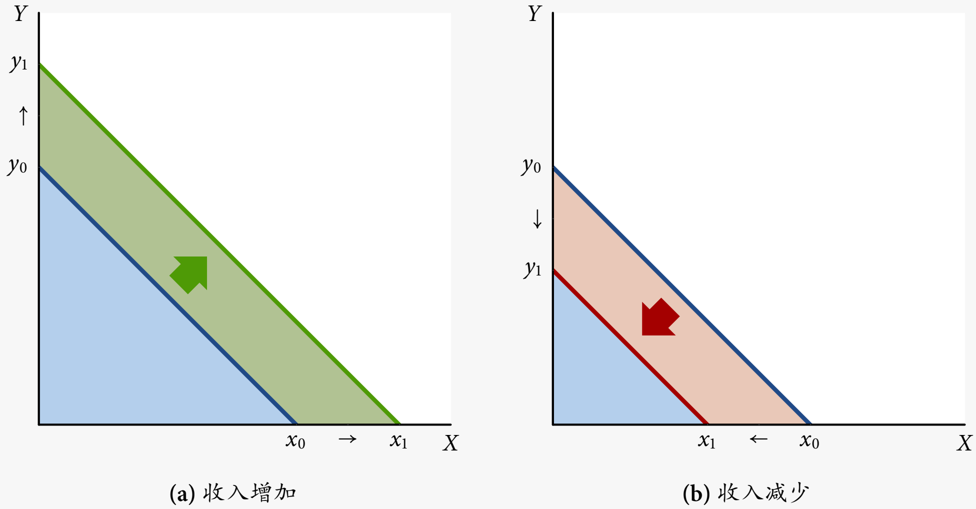
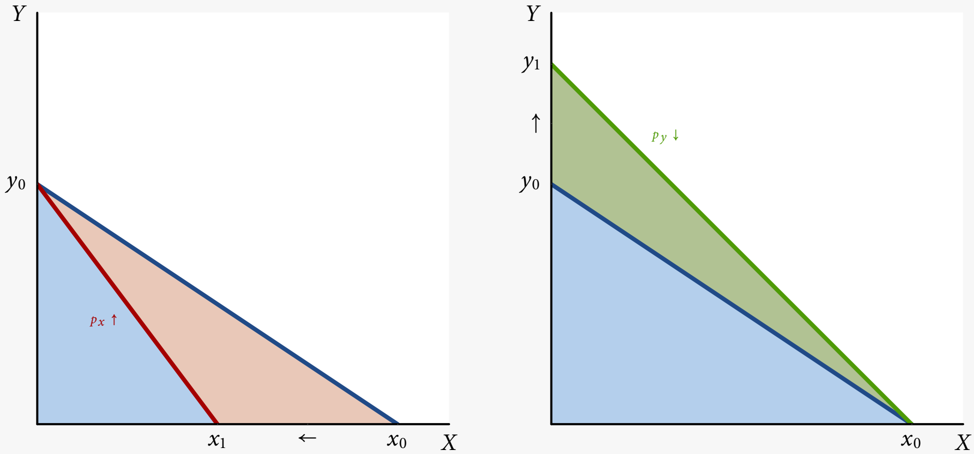


图 3.2: 消费者收入对预算集的影响

3.3 价格变化对预算集的影响



(a) X 价格上升 (b) Y 价格下降

图 3.3: 商品价格变化对预算线的影响

当 p_x 不变而 p_y 下降时，预算线 (p_x^0, p_y^0) “旋转”到 (p_x^0, p_y^1) 位置；当 p_y 不变而 p_x 上升时，预算线 (p_x^0, p_y^0) “旋转”到 (p_x^1, p_y^0) 位置；当 p_x、p_y 同时下降时，预算线会向右上方“漂移”；当 p_x、p_y 同时上升时，预算线会向左下方“沉降”。

3.4 预算份额

对于收入 m，消费的商品数量为 $X = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$，商品价格水平为 $P = (p_1, p_2, \cdots, p_n)$，则称

$$S_i = \frac{p_i x_i}{m} \tag{3-2}$$

为购买商品 x_i 的收入份额或预算份额。这里的商品数量 X 为消费者均衡时的需求数量，关于这一点将在第6章讨论。

对于 C–D 效用函数 $u = x_1^{\alpha} x_2^{\beta}$，求解预算份额。

推荐阅读

空

第 4 章　偏好与无差异曲线

假设给定两个消费束 $A:(x_1, y_1)$ 与 $B:(x_2, y_2)$，消费者可按照他自己的意愿对这两个消费束排序。即消费者可以认为一个消费束严格好于另外一个消费束，或者认为这两个消费束无差异。

我们用符号 $\succ$ 表示*严格偏好*，因此 $A \succ B$ 表示消费者严格偏好 (x_1, y_1) 胜于 (x_2, y_2)，意思是说他肯定想要消费束 A 而不是消费束 B。这种偏好关系提供了判断消费者选择哪个消费束的依据。如果消费者偏好消费束 A 胜于消费束 B，那么他会选择消费束 A。因此，偏好的思想是基于消费者行为之上的。

无差异的，用符号 $\sim$ 表示。$(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2)$ 表示消费者根据自己的偏好，认为这两个消费束 A 和 B 提供的满足程度是一样的。

弱偏好，用符号 $\succeq$ 表示。$(x_1, y_1) \succeq (x_2, y_2)$ 指的是消费者对于前者的偏好胜于后者或者对于这两个消费束无差异，即消费者认为前者至少与后者一样好。

4.1　偏好的公理性假设

消费者理论的公理性假设：

- *完备性公理*：假设任何两个消费束都可以比较，即给定消费束 A 和消费束 B，必有 $(x_1, y_1) \succeq (x_2, y_2)$；或者 $(x_2, y_2) \succeq (x_1, y_1)$；或者二者都成立，即消费者对于这两个消费束是无差异的。
- *反身性公理*：假设任何消费束都至少和它本身一样好，即 $(x_1, y_1) \succeq (x_1, y_1)$。
- *传递性公理*：如果 $(x_1, y_1) \succeq (x_2, y_2)$，并且 $(x_2, y_2) \succeq (x_3, y_3)$，则 $(x_1, y_1) \succeq (x_3, y_3)$。即，如果消费者认为消费束 A 至少和 B 一样好，而且 B 至少与 C 一样好，则他认为消费束 A 与 C 至少一样好。

4.2　良性偏好

第一个假设：*局部餍足性又称局部非饱和性*，指的是任何消费都不存在充分满足。其意义是指不存在任何消费束令消费者达到满足的极限，总有更偏好的消费束存在。对于任意的 (x_1, y_1)，总可以找到另一个消费束 x_2, y_2 使得 $(x_2, y_2) \succ (x_1, y_1)$。

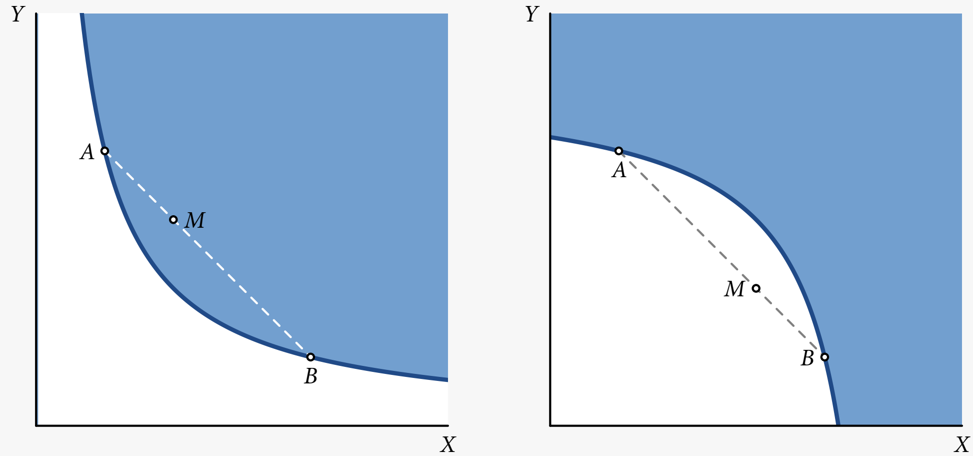
第一个假设：连续性，无差异集合的图形是一个连续的曲面。

草稿：第一个假设：在没有达到饱和点之前*偏好具有单调性，或者说多多益善*。

给定两个消费束 (x_1, y_1) 和 (x_2, y_2)，如果 $x_2 \geq x_1$ 且 $y_2 > y_1$ 或者 $x_2 > x_1$ 且 $y_2 \geq y_1$，则必有 $(x_2, y_2) \succ (x_1, y_1)$。这表示我们研究的商品对象为 goods（好的、想要的商品），而非 bads（坏的、厌恶的商品）。

从几何上偏好的单调性假设决定了无差异曲线的斜率是负的。对于一个给定的消费束 (x_1, y_1)，如果增大 x1 的消费数量至 $(x_1 + a, y_1)$，则 $(x_1 + a, y_1) \succ (x_1, y_1)$。这时只有减少 y 的消费数量至 $(x_1 + a, y_1 - b)$ 才有可能使得 $(x_1 + a, y_1 - b) \sim (x_1, y_1)$。

第二个假设：凸性，平均束好于端点束，即在一条无差异曲线上任取两个消费束，二者连线上的任意一个消费束（端点除外）都弱偏好或者严格偏好于端点消费束。



(a) 凸性偏好 (b) 凹性偏好

图 4.1: 偏好类型举例

4.3 无差异曲线的意义

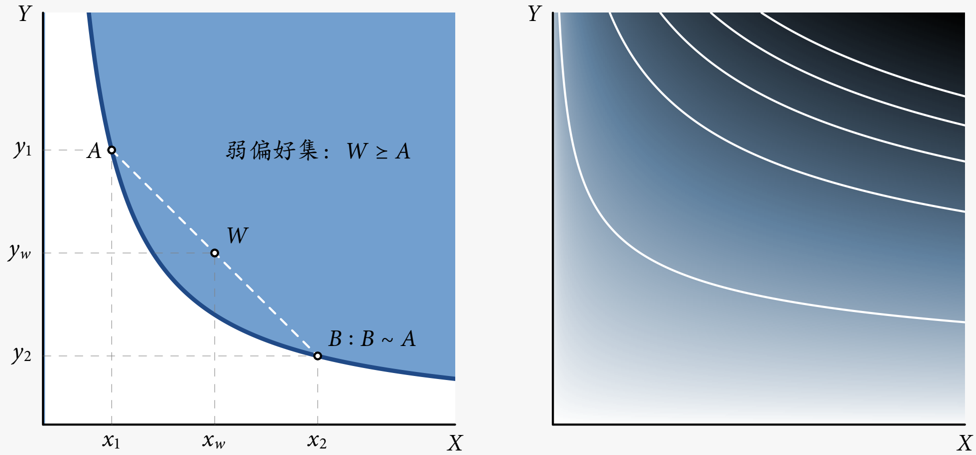
定义 (无差异曲线) 无差异曲线是用来表示消费者偏好相同的两种商品的所有组合的。或者说，它是表示能够给消费者带来相同的效用水平或满足程度的两种商品的所有组合的。[3] ■

绘制示意图的时候往往选择“疏密适中”的三四条“等高线”作为代表，我们所关注的只是无差异曲线的个体形态和整体次序，他们的疏密是无意义的——这和带有基数特征的等产量线是不同的（第49页3小节）。对效用函数的单调变换不会影响序数论的效用分析，反面来看就是说效用分析中不存在“规模报酬”。例如 $u = xy^3$ 和 $u = x^{1/4}y^{3/4}$ 所描述的偏好是一致的。

由于假设效用函数的连续性，如果用色彩深浅代表效用水平的高低，那么整个无差异曲线系统使用密度图或者三维空间的曲面表示更直观一些。限于我的编辑能力和所选软件的限制仅能退而求其次了。

无差异曲线的基本特征

- 效用面是连续平面，这个特点与偏好的连续性假设对应；
- 效用曲面随着 x 或 y 的增加是递增的，即在图（4.3）中 AB、CD、EF 以及 OZ 方向



(a) 无差异曲线与弱偏好集

(b) 无差异曲线（等高线图与密度图）

图 4.2: 无差异曲线的意义

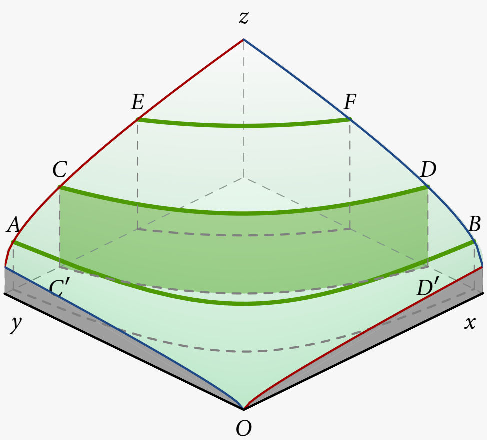


图 4.3: 效用曲面与无差异曲线

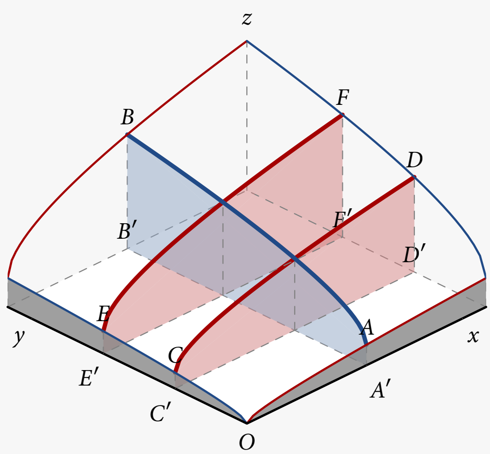


图 4.4: 边际效用

上都是递增的[1]，这个特点与偏好的单调性对应；

- 效用面向 x、y 增加的方向无限延伸，这与偏好的局部非饱和性对应；
- 任何一条无差异曲线的斜率都为负，即 x 的增加必定以牺牲 y 为代价，这个特点与偏好的图形假设对应；

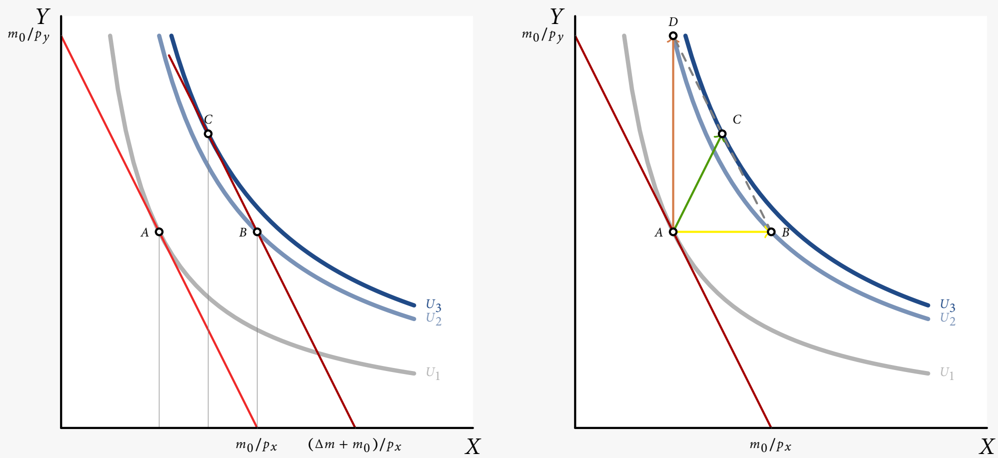
[1] 效用面就像一只手总是向上扬起的，至于是否半握、手心向上还是向下是无关紧要的。

- 永不相交，也与偏好的单调性对应[1]；
- 完备性
- 任何一条无差异曲线都凸向原点，即边际替代率递减，这与偏好的严格凸性假设对应。
- …

4.4 例题分析

1. 实物礼品和货币礼金[2]

如果你的一个朋友准备结婚，你可以送他一件礼物，也可以送他相当于这件礼物市场价格的现金。哪种方法能给你的朋友带来更高效用？为什么？试用无差异曲线图来说明。



(a) (b)

图 4.5: 实物礼品和货币礼金

如图（4.5a）所示，X 是要送朋友的实物，Y 是所有其他实物的复合品。要么赠送 Δx 数量的实物礼品，要么赠送与该实物礼品等价值的现金 $\Delta m = \Delta x p_x$ 那么：

- 在价格水平 (p_x, p_y) 和朋友的既定收入 m_0 下，原有的消费者均衡位于 A 点；
- 送朋友 Δx 数量的 X 实物之后商品束由 A 点向右平移至 B 点，$|AB| = \Delta x$；
- 假如当初送朋友 Δm 元现金，则等同于增加朋友的预算，在价格水平不变的前提下预算线外扩直至经过 B 点（与 B 的购买力一样）；
- 在新的预算约束 $\Delta m + m_0$ 下，朋友达成新的消费者均衡 C。

---

① 有待完善。

② 黄亚钧. 微观经济学 [M]. 3 ed. 北京: 高等教育出版社, 2009: 68.，第 18 题；黄亚钧, 蒋毅一. 微观、宏观经济学（第二版）学习指导书 [M]. 北京: 高等教育出版社, 2007: 24.，第 16 题

注意，这个图示与分析只是一般意义上的讨论，其前提是朋友对所赠礼品和其他复合品的偏好满足严格凸性假设，属于良性偏好。至于完全偏好等类型大家可以自己画图分析。

或者如图（4.5b），根据良性偏好“平均束优于端点束”的假设进行分析，参看第21页。

推荐阅读

本章附录

凸集

二元函数与曲面

第 5 章　偏好与效用函数

5.1　无差异曲线和效用函数

5.2　效用函数的单调变换

与基数效用论不同，基于偏好分析的序数效用论并不要求效用函数具备“准确”的数值，从这个角度来看某种偏好的效用函数表达的是“序数指数”——当然，这只是我自娱自乐的文字游戏。

假设偏好对应的效用函数为 $u = v(x, y)$，当 $u_1 > u_2$，意味着 $f(u_1) > f(u_2)$ 时，则称 $f(v)$ 为原效用函数 $u(x)$ 的单调变换。

这意味着在经济意义满足的条件下只要函数 $f(\cdot)$ 为单调函数，就可以将既有的效用函数 $u = u(x, y)$ 变换为 $u = f[v(x, y)]$ 而不违背该效用函数背后的偏好特征，也不改变无差异曲线的特征。

常见的单调变换有：

- 乘上一个整数：$u = av$，其中 $a > 0$；
- 加上任意常数：$u = v + a$，其中 a 为常数；
- 取奇数次幂：$u = v^k$，其中 k 为奇数；
- 取对数（指数）函数：$u = \ln v$，或 $u = e^v$；

5.3　边际效用

第三个假设：效用函数的任意阶可导。

若保持其他商品消费数量不变，第 i 种商品数量变动 1 单位所带来的总效用变化称为该商品（在该消费数量上的）边际效用，对应的函数称为边际效用函数。

假设效用函数为 $u = u(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，则第 i 种商品的边际效用函数为

$$MU_i = \frac{\partial u(\cdot)}{\partial x_i} \tag{5-1}$$

在序数论中边际效用的数值是无关紧要的，因为效用函数的出的总效用本身就是无关紧要的。例如 $u = x^2y^2$ 的边际效用函数为 $u_x = 2xy^2$，在 y 一定的情况下 u_x 在数值上显然是递增的。在序数论中为消费者最优提供参考依据的是商品之间的关系——边际替代率。

5.4 边际替代率

假设效用函数为 $u = u(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，若增加第 i 中商品的消费数量且保持效用水平不变，第 j 种商品消费数量作何调整？

$$du = \frac{\partial u(\cdot)}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial u(\cdot)}{\partial x_2}dx_2 + \cdots + \frac{\partial u(\cdot)}{\partial x_i}dx_i + \cdots + \frac{\partial u(\cdot)}{\partial x_j}dx_j + \cdots + \frac{\partial u(\cdot)}{\partial x_n}dx_n \tag{5-2}$$

为保持总效用不变，取 $du = 0$；只变动第 i、j 两种商品，则 $dx_k = 0$，其中 $k = 1, 2, \cdots, n$ $k \neq i, j$，得到

$$\frac{\partial u(\cdot)}{\partial x_i}dx_i + \frac{\partial u(\cdot)}{\partial x_j}dx_j = 0 \tag{5-3}$$

边际偏好替代率为

$$MRS_{i\text{ for }j} = \frac{dx_j}{dx_i} = -\left.\frac{\partial u(\cdot)}{\partial x_i}\right/\frac{\partial u(\cdot)}{\partial x_j} = -\frac{MU_i}{MU_j} \tag{5-4}$$

前文提到效用函数的单调变换不改变偏好特征，包括不改变商品之间的边际替代率。对效用函数做单调变换

$$u = u(\cdot) \to u = f[u(\cdot)] \tag{5-5}$$

根据复合函数求导的链式法则

$$MRS_{i\text{ for }j} = \frac{dx_j}{dx_i} = -\left.f'[u(\cdot)]\frac{\partial u(\cdot)}{\partial x_i}\right/f'[u(\cdot)]\frac{\partial u(\cdot)}{\partial x_j} = -\frac{MU_i}{MU_j} \tag{5-6}$$

5.5 常见的偏好类型与其效用函数

1. 线性效用函数

如图（5.1），线性效用函数形如 $u = f(x, y) = \alpha x + \beta y$，偏导数分别为：

$$MU_x = f_1 = \alpha，\quad MU_y = f_2 = \beta$$

边际替代率分别为：

$$MRS_{x\text{ for }y} = \frac{\alpha}{\beta}$$

2. 完全互补

效用函数为 $u = f(x, y) = \min\{\frac{x}{u}, \frac{y}{v}\}$，或 $u(x, y) = \min\{ax, by\}$。

一个简易变种 $U(x, y) = \min\{ax, by + cx\}$。

3. 拟线性偏好

如图（5.4），拟线性偏好的效用函数形如 $u = f(x, y) = v(x) + y$，其中 $v(x)$ 是递增且严格凹的（$v' > 0$，$v'' < 0$）。整个无差异曲线族可以由其中任何一条曲线沿 y 轴平移得到。拟线性效用函数的偏导数分别为：

$$MU_x = f_1 = v'(x)，\quad MU_y = f_2 = 1$$

则商品 X、Y 的边际替代率为，

$$MRS_{x\text{ for }y} = \frac{MU_x}{MU_y} = \frac{f_1}{f_2} = v'(x) \tag{5-7}$$

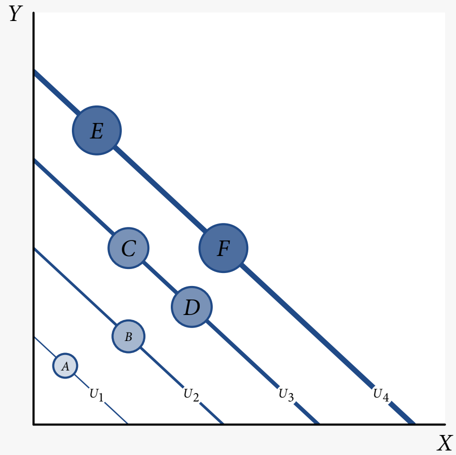


图 5.1: 线性偏好的无差异曲线

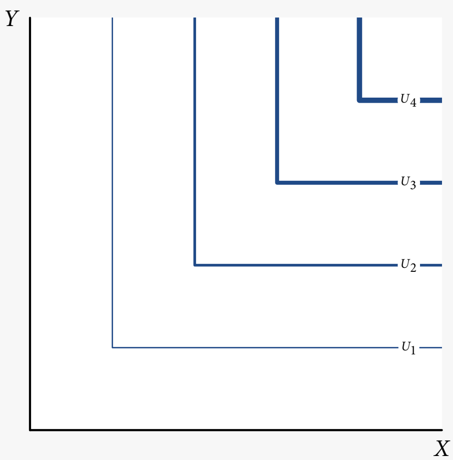


图 5.2: 完全互补型偏好

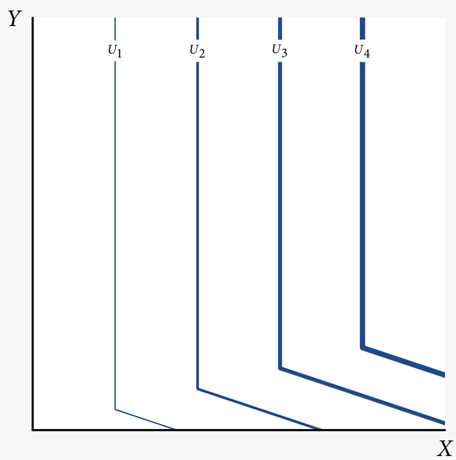


图 5.3: 一个简易变种

4. Cobb–Douglas 效用函数

如图（5.5），柯布—道格拉斯效用函数为

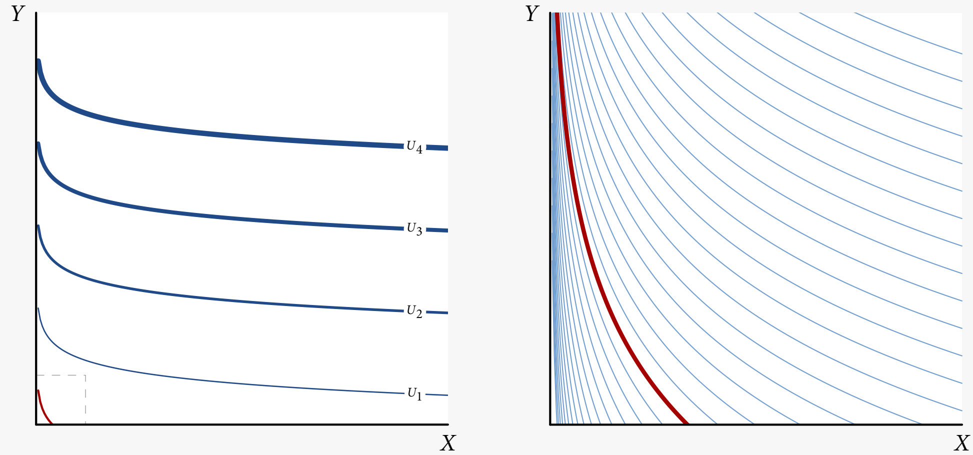
$$u = f(x, y) = x^{\alpha} y^{1-\alpha} \tag{5-8}$$

其中 $0 < \alpha < 1$。那么商品 X 和 Y 的边际效用函数分别为，

$$MU_X = f_1 = \alpha(\frac{x}{y})^{\alpha-1}, \quad MU_Y = f_2 = (1-\alpha)(\frac{x}{y})^{\alpha}$$

无差异曲线的斜率——两商品边际替代率的反数为：

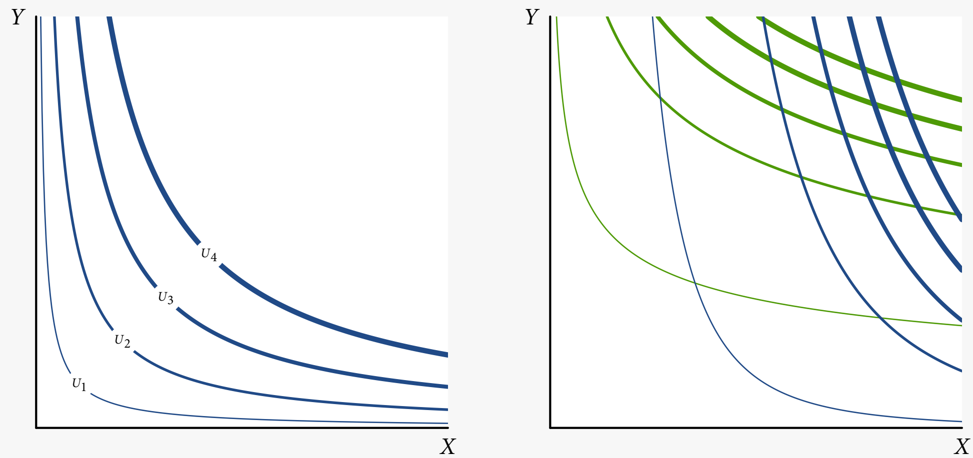
$$\frac{dx}{dy} = -\frac{1-\alpha}{\alpha}\frac{x}{y}.$$



(a) 全图 (b) 局部图

图 5.4: 拟线性偏好 $U(x, y) = \ln x + y$

柯布—道格拉斯效用函数并不要求 x、y 的指数和为 1，但这种选择在分析消费者对这两种商品的预算份额时显得很便利。



(a) $U(x, y) = x^{1/2}y^{1/2}$ (b) $U(x, y) = x^{3/4}y^{1/4}$ 与 $U(x, y) = x^{1/4}y^{3/4}$

图 5.5: 柯布—道格拉斯函数的无差异曲线

5. CES 效用函数

CES 效用函数，也称作固定弹性替代效用函数（Constant Elasticity of Substitution），形如：

$$u = f(x, y) = [\alpha x^{\rho} + (1 - \alpha)y^{\rho}]^{1/\rho} \tag{5-9}$$

其中 $\alpha \in (0,1)$，$\rho \le 1$，Cobb-Douglas 效用函数是 CES 效用函数在 $\rho \to 0$ 时的特殊情况。

商品 x 的边际效用函数为，

$$MU_X = \alpha\left[\alpha x^{\rho} + (1-\alpha)y^{\rho}\right]^{\frac{1}{\rho}-1} x^{\rho-1}$$

商品 y 的边际效用函数为，

$$MU_Y = (1-\alpha)\left[\alpha x^{\rho} + (1-\alpha)y^{\rho}\right]^{\frac{1}{\rho}-1} y^{\rho-1}$$

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{1-\alpha}{\alpha}\left(\frac{x}{y}\right)^{1-\rho}$$

推荐阅读

本章附录

偏导数

第 6 章　消费者最优选择

消费者最优选择就像在后院刨坑种树，面临两个约束：（1）地点必须在你家的篱笆墙内；（2）必须是生长环境最好的点。当然如果不会引起争端的话，你也可以砍掉篱笆把树种在这个邻里边界上，这就是角点解。总而言之，消费者最优选择必须是最富偏好、负担得起的消费束。这和笔记开头对需求定义中的愿意且能够购买很相似，因为他们本来就是一根绳子上的铃铛，扯一扯都会响叮当。

假设某人对两商品的偏好表现为效用函数 $u(x,y)=x_1^{\alpha}x_2^{\beta}$，商品价格分别为 p_1、p_2，其收入水平为 m，其中 $\alpha,\beta,x_1,x_2,p_1,p_2,m>0$。那么对于任一给定的 (p_1,p_2,m) 组合该消费者该如何选择这两种商品的消费数量？

6.1　直接的边际分析法

沿着预算线调整分配额度，使得达到某一个分配状态，任何增减都不会带来额外的改善。

$$MRS_{1,\,2}=\frac{p_1}{p_2} \tag{6-1}$$

$$\frac{MU_1}{p_1}=\frac{MU_2}{p_2} \tag{6-2}$$

6.2　消元法

假如效用函数为二元函数：

$$u=f(x_1,x_2) \tag{6-3}$$

预算约束为 $p_1x_1+p_2x_2=m$，用 x_1 表示 x_2 得到：

$$x_2=\frac{m-p_1x_1}{p_2} \tag{6-4}$$

将式（6-4）带入式（6-3）消元为：

$$u=g(x_1) \tag{6-5}$$

该效用函数达到极大值的一阶必要条件为：

$$MU_1=\frac{du}{dx_1}=g'(x_1)=0 \tag{6-6}$$

注意，在这里 $MU_1=0$ 和上一节边际分析中消费者均衡条件（6-2）是一致的。因为对于一元效用函数（6-5）来说 $MU_2=\frac{\partial g(x_1)}{\partial x_2}=0$，于是仍满足式（6-2）。

6.3 拉格朗日极值法

首先，其消费束所带来的效用函数值越大越好：

$$\max\ u = x_1^{\alpha} x_2^{\beta} \tag{6-7}$$

第二，他所选择的消费束必须是可支付的，即面临预算约束：

$$p_1 x_1 + p_2 x_2 \leq m \tag{6-8}$$

构造拉格朗日函数：

$$\mathcal{L}(x_1, x_2, \lambda) = x_1^{\alpha} x_2^{\beta} + \lambda(m - p_1 x_1 - p_2 x_2) \tag{6-9}$$

一阶必要条件满足

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} = \alpha x_1^{\alpha-1} x_2^{\beta} - \lambda p_1 = 0 \tag{6-10}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2} = \beta x_1^{\alpha} x_2^{\beta-1} - \lambda p_2 = 0 \tag{6-11}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = m - p_1 x_1 - p_2 x_2 = 0 \tag{6-12}$$

消去 λ 解得该消费者对这两种商品的最优选择如下，

$$x_1 = \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \cdot \frac{m}{p_1} \tag{6-13}$$

$$x_2 = \frac{\beta}{\alpha + \beta} \cdot \frac{m}{p_2} \tag{6-14}$$

我们分析一下柯布—道格拉斯函数最优解可爱的数学形式，以式（6-13）为例：

$$x_1 = \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \cdot \frac{m}{p_1} = \frac{m \cdot \dfrac{\alpha}{\alpha + \beta}}{p_1}$$

很明显，其中 $m \cdot \frac{\alpha}{\alpha+\beta}$ 是收入中用来购买 x_1 的部分，$\frac{\alpha}{\alpha+\beta}$ 即是商品 1 在收入中所占的消费份额。如果我们增设或者说对现有的效用函数做一个单调变换，对其开 $\alpha + \beta$ 次方得到：

$$u(x, y) = x_1^{c} x_2^{d} \tag{6-15}$$

其中 $c = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}$，$d = \frac{\beta}{\alpha+\beta}$，$c + d = 1$。则 c、d 直接地代表两商品在收入中所占的消费份额。在这种新的表达形式下消费者最优选择变为：

$$x_1 = c \cdot \frac{m}{p_1} \tag{6-16}$$

$$x_2 = d \cdot \frac{m}{p_2} \tag{6-17}$$

可见柯布—道格拉斯效用函数中两商品的需求曲线为双曲线的一支，其需求的价格弹性、需求的交叉价格弹性以及需求的收入弹性为：

$$\varepsilon_{1,1} = \frac{dx_1}{dp_1}\frac{p_1}{x_1} = -1 \tag{6-18}$$

$$\varepsilon_{2,1} = \frac{dx_1}{dp_2}\frac{p_2}{x_1} = 0 \tag{6-19}$$

$$\varepsilon_{m} = \frac{dx_1}{dm}\frac{m}{x_1} = 1 \tag{6-20}$$

6.4 拟线性偏好的非线性规划[①]

$$\begin{aligned} \max\ & u = x_2 + a\ln x_1 \\ \text{s.t. } & m \geq p_1x_1 + p_2x_2 \\ \text{and } & x_1,\ x_2 \geq 0 \end{aligned} \tag{6-22}$$

构造拉格朗日函数 $\mathcal{L}(x_1, x_2, \lambda) = x_2 + a\ln x_1 + \lambda(m - p_1x_1 - p_2x_2)$，一阶必要条件（库恩—塔克条件）：

$$\begin{aligned} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x_1} &= \frac{a}{x_1} - \lambda p_1 \leq 0, \quad x_1 \geq 0,\ x_1\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x_1} = 0 \\ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x_2} &= m - \lambda p_2 \leq 0, \quad x_2 \geq 0,\ x_2\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x_2} = 0 \\ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial \lambda} &= m - p_1x_1 - p_2x_2 \geq 0, \quad \lambda \geq 0,\ \lambda\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial \lambda} = 0 \end{aligned} \tag{6-24}$$

一般情况下，要讨论 $x_1 > 0$，$x_1 = 0$；$x_2 > 0$，$x_2 = 0$ 与 $\lambda > 0$，$\lambda = 0$ 组合形成的 8 种情况，不过在此问题中，边际效用 u_1，u_2 均为正（即偏好关系满足局部非饱和性），故而不会有收入剩余，否则可以通过继续增加消费使得效用增加，因此预算约束是紧的，即 $\lambda > 0$；另外，由效用函数的形式，必有 $x_1 > 0$。因此需要讨论的情况只有两种：

第一种情况：$x_1 > 0$，$x_2 = 0$，$\lambda > 0$。此时库恩—塔克条件变为：

$$\begin{aligned} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x_1} &= \frac{a}{x_1} - \lambda p_1 = 0 \\ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x_2} &= m - \lambda p_2 \leq 0 \\ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial \lambda} &= m - p_1x_1 - p_2x_2 = 0 \end{aligned} \tag{6-26}$$

解得：$x_1 = \frac{m}{p_1}$，$x_2 = 0$，$\lambda = \frac{a}{m}$，并且满足参数条件 $m \leq ap_2$。

① 张军. 高级微观经济学 [M]. 上海: 复旦大学出版社, 2002: 9–11.

第二种情况：$x_1 > 0$，$x_2 > 0$，$\lambda > 0$。此时库恩—塔克条件变为：

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} = \frac{a}{x_1} - \lambda p_1 = 0$$
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2} = m - \lambda p_2 = 0$$
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = m - p_1 x_1 - p_2 x_2 = 0 \tag{6-28}$$

解得：$x_1 = \frac{ap_2}{p_1}$，$x_2 = \frac{m-ap_2}{p_2}$，$\lambda = \frac{1}{p_2}$，并且满足参数条件 $m > ap_2$。

从求解的过程来看，虽然题目没有直接说明，但其实问题中的参数是有条件的，参数空间可以划分为各个不同的部分，每一部分对应于求解的一个具体过程。当 $m \leq ap_2$ 时，$x_1 > 0$，$x_2 > 0$，$\lambda > 0$；当 $m > ap_2$ 时，$x_1 > 0$，$x_2 > 0$，$\lambda > 0$。

推荐阅读

本章附录

空

第 7 章　收入效应与替代效应

7.1　希克斯分解

当一种商品的价格发生变化时，会对消费者产生量中影响：一是使消费者的实际收入水平发生变化。在这里，实际收入水平的变化被定义为效用水平的变化。二是使商品的相对价格发生变化。这两种变化都会改变消费者对该商品的需求量。

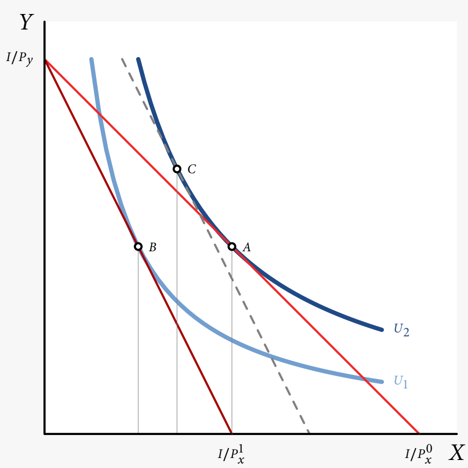
一种商品价格的变动所引起的该商品需求量变动的总效应可以被分解为替代效应和收入效应两部分，即

$$\text{总效应} = \text{替代效应} + \text{收入效应} \tag{7-1}$$

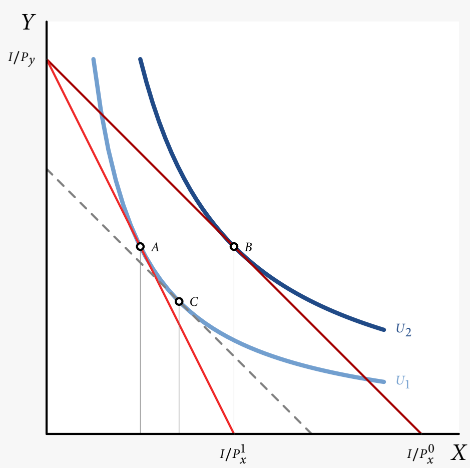
定义 (替代效应) 在实际收入水平保持不变的情况下，与某种商品的价格变化相联系的商品需求量的变化。■

定义 (收入效应) 由商品价格变动引起的实际收入水平的变动引起的商品需求量的变动。■

按照前面对实际收入水平的界定，收入效应表示消费者的效用水平发生变化，而替代效应则不改变消费者的效用水平。



(a) 商品 X 涨价



(b) 商品 X 降价

图 7.1: 希克斯替代

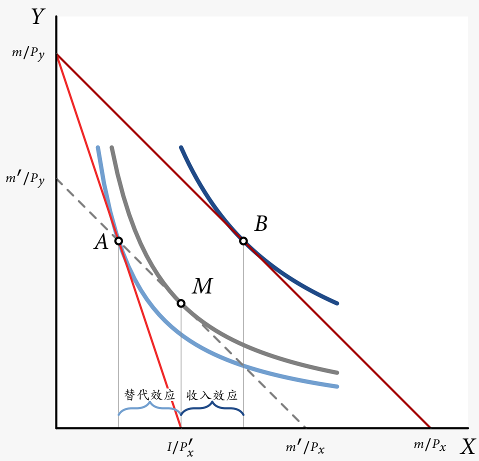


图 7.2: 斯拉茨基替代

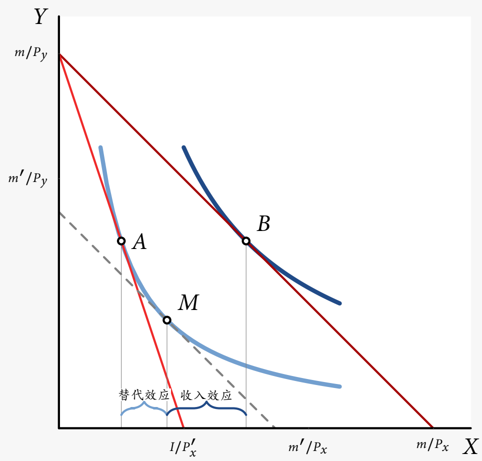
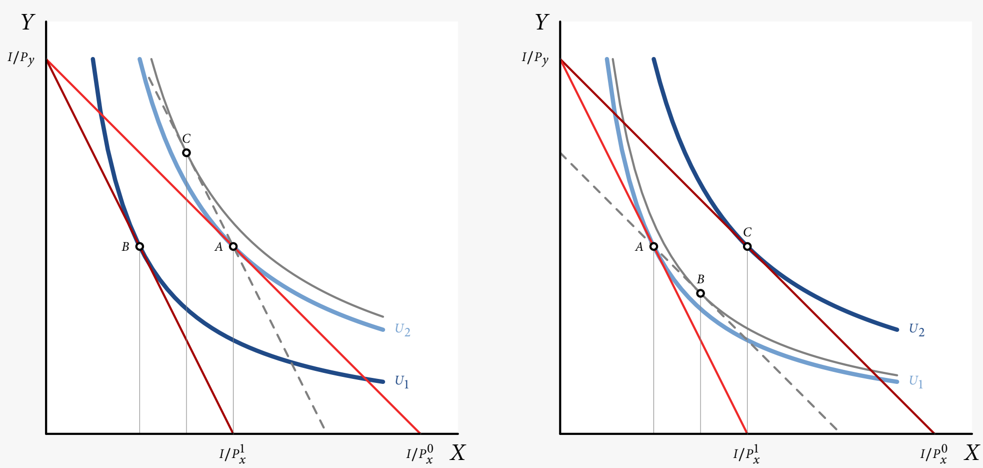


图 7.3: 希克斯替代

7.2 斯拉茨基分解

什么是购买力不变？



(a) 商品 X 涨价

(b) 商品 X 降价

图 7.4: 斯拉茨基替代

7.3 斯拉茨基方程

$$h_i(p,u) \equiv x_i(p,e(p,u))$$

$$\frac{\partial h_j(p^*,u^*)}{\partial p_i} = \frac{\partial x_j(p^*,m^*)}{\partial p_i} + \frac{\partial x_j(p^*,m^*)}{\partial m} \cdot \frac{\partial e(p^*,u^*)}{\partial p_i}$$

案例：卡特政府的燃油税

某年月日，吉米・卡特政府提案利用燃油税抑制汽油需求，进而减轻对外国能源进口的依赖程度。旋即遭到反对，反对者认为该提案会使得贫困家庭生活状况更加窘迫。为平复该反对，卡特政府提议以燃油税抵消个人所得税。新的反对者认为这种做法是徒劳无功的：即便课征燃油税，其效果也恰好会被提高了的个人收入所抵消，汽油需求数量不会有任何变化。

推荐阅读

1. 萨缪尔森. (2006). 经济分析基础增补版 (何耀, 傅征, 刘生龙, 陈宏卫 & 王兴林, 译.). 大连：东北财经大学出版社.

2. Cook, P. J. (1972). A “One Line” Proof of the Slutsky Equation. *The American Economic Review*, 62(1/2), 139.

3. 杰里, 瑞尼. 高级微观经济理论 [M]. 第 2 版. 上海: 上海财经大学出版社, 2001: 46–48.

4. Jehle, G. A., & Reny, P. J. (2011). *Advanced Microeconomic Theory* (3 ed.): Prentice Hall, 53–55.

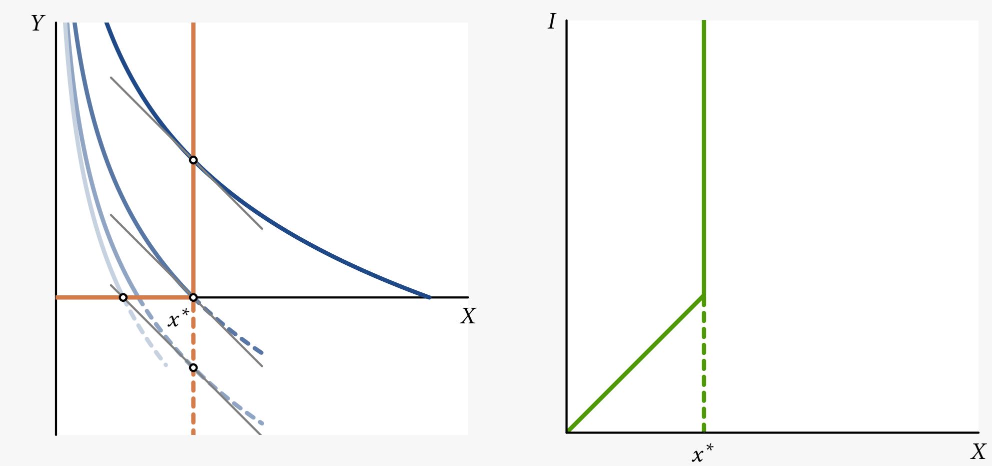
空

第 8 章　恩格尔曲线与需求曲线

8.1　收入提供曲线与恩格尔曲线

恩格尔曲线表示消费者在每一收入水平下，对某种商品的消费量。

$$q_1 = f(\overline{p}_1, \overline{p}_2, m) \tag{8-1}$$



(a) 收入提供曲线　　(b) 恩格尔曲线

图 8.1: 拟线性曲线的收入提供曲线和恩格尔曲线

拟线性曲线的特征：整个曲线族可以通过对其中任一条曲线在 y 方向平移得到，见图（5.4）。故而对于任意给定的 x 所有曲线上对应的点的切线是等斜率的，其“扩展线”为平行于 y 轴的直线，其收入提供曲线是一条 ⌟ 型的折线。

在第6页第2.3节《弹性》中已经对需求收入弹性的概念做了介绍，在那里无非是为了满足“拓展弹性的应用价值”这个教学目的，一种商品的需求数量和收入水平有怎样的关系都是模糊的。

1. 位似偏好的需求的收入弹性为 1[①]

2. 推导收入提供曲线

注意：通过收入扩展曲线可以得到恩格尔曲线，但收入提供曲线不是恩格尔曲线，有的朋友总说这二者没有差别啊——他们根本不是描述相同变量的相同函数、绘制在不同的坐标系中，怎么会等同呢。

8.2 价格消费曲线与需求曲线

$$q_1 = f(p_1, \overline{p}_2, \overline{m}) \tag{8-2}$$

1. 推导价格消费曲线

推荐阅读

① 格拉韦尔, 里斯. 微观经济学 [M]. 第 3 版. 上海: 上海财经大学出版社, 2009: 63–64.

第 9 章　生产函数

9.1　生产函数[①]

生产函数 表示在一定时期内，在技术水平不变的情况下，生产中所使用的各种生产要素的数量与所能生产的最大产量之间的关系。 生产函数

在这个定义中技术水平不变作为条件出现，从另一个角度来看生产函数也反映了技术水平高低：不同的技术水平下同样的要素投入会得到不同的最大产出。

用 x_i 表示某产品生产所需之要素投入数量，q 表示所能生产的最大产量，则生产函数可以表示成：

$$q = f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

注意这里的要素投入 x_i 以及最大产量 q 都是流量，一般指每年的要素投入、每年的最大产出。

为简化分析，我们只研究劳动和资本这两种最主要的生产要素所构成的生产函数：

$$q = f(l, k) \tag{9-1}$$

首先设定企业的产出是有效率的。企业产出 q 和要素投入 (l, k) 均非负。生产函数 $f(l, k)$ 表示在 (l, k) 的投入水平下能够达到的最大产出水平，于是企业生产行为的技术约束条件可以表示为：

$$0 \le q \le f(l, k) \tag{9-2}$$

如果企业在投入水平 (l, k) 下的产出等于可能的最大产出水平，我们认为企业的产出是有效率的，于是企业面临的技术约束条件可以改写为

$$q = f(l, k) \tag{9-3}$$

第二，企业生产满足零投入零产出：

$$f(0, 0) = 0 \tag{9-4}$$

此外，如果缺少某种特定的要素投入，无论其他要素投入再多企业也无法进行生产（$q = 0$），于是上式又可以改写为更严格的形式：

$$f(0, x) = 0 \tag{9-5}$$

[①] 格拉韦尔, 里斯. 微观经济学 [M]. 第 3 版. 上海: 上海财经大学出版社, 2009.

其中 $i = l, k$，且 $i \neq 0$。

第三，假设生产函数 $f(l,k)$ 是二阶连续可微的，与前面两个假设相比这是一个更强的（更脱离现实的）假设。不过这个假设可以使得许多经济学量与经济规律的描述变得简单。

9.2 等产量线

和前面序数性质的效用函数不同，生产函数包含了对产出水平具体数值的测度，属于基数函数。用来描述某种技术水平的生产函数是唯一确定的。

如同定义所说，生产函数可以表示要素组合 (l_0, k_0) 所能得到的最大产出水平 q_0；反过来生产函数也能界定指至少能达到产出水平 q_0 的要素组合 $X(q_0)$：

$$X(q_0) = \{(l,k) \mid f(l,k) \geq q_0\} \tag{9-6}$$

9.3 常见的生产函数

1. 固定替代比例生产函数

固定替代比例

固定替代比例生产函数也称里昂惕夫生产函数，其要素投入满足完全替代关系：

$$q = f(l,k) = \alpha l + \beta k \tag{9-7}$$

值得注意的是，上述函数形式潜含了规模报酬不变的性质，但“固定替代比例”描述的是要素间的替代关系而非规模报酬。例如

$$q = f(l,k) = g(\alpha l + \beta k) = (\alpha l + \beta k)^{\gamma} \tag{9-8}$$

该生产函数仍是固定替代比例生产函数但规模报酬特征决定于 γ 和 1 的关系，详见第49页。

2. 固定投入比例生产函数

3. Cobb–Douglas 生产函数

4. CES 生产函数

9.4 超短期生产

9.5 短期生产：一种可变要素

1. 长期和短期

2. 产量函数

在生产函数 $q = f(l,k)$ 的基础上，假定资本投入量 k 在短期内是固定的 $\bar{k}$，而劳动投入量 l 是可变的，则生产函数可以写成：

$$q = f(l, \bar{k}) \tag{9-9}$$

通过生产函数引进劳动的总产量（total product，TP）、平均产量（average product，AP）与边际产量（marginal product，MP）这三个概念。

劳动的总产量指在资本投入固定为 $\bar{k}$ 的条件下，劳动要素投入量所对应的最大产量。定义公式为： 总产量

$$TP_l = f(l, \bar{k}) \tag{9-10}$$

劳动的平均产量指在资本投入固定为 $\bar{k}$ 的条件下，平均每一单位劳动要素的投入量所生产的产量。定义公式为： 平均产量

$$AP_l = \frac{f(l, \bar{k})}{l} \tag{9-11}$$

劳动的边际产量指在资本投入固定为 $\bar{k}$ 的条件下，每增加一单位劳动要素所带来的总产量增加量。定义公式为： 边际产量

$$MP_l = \frac{df(l, \bar{k})}{dl} \tag{9-12}$$

应当注意，关于劳动要素的这三个产量函数都是以确定的资本要素投入量为前提的，$\bar{k}$ 变化以后上述函数的具体形式形式也会改变。当劳动要素短期固定而资本要素可变的时候也可以得到对应的资本的总产量、资本的平均产量和资本的边际产量这些概念。 偏导数

3. 边际报酬

9.6 长期生产：所有要素可变

9.7 边际技术替代率与替代弹性

1. 边际技术替代率

边际技术替代率（marginal rate of technical substitution，$MRTS$）或称技术替代率（rate of technical substitution，RTS）指的是在维持产量水平不变的条件下，增加一单位某种生产要素的投入量时所减少的另一种要素的投入数量。可以表示为[①]， 技术替代率

$$MRTS_{l,\,k} = \left|\frac{dk}{dl}\right| \tag{9-13}$$

在几何上，要素组合 (l_1, k_1) 处劳动对资本的的边际替代率等于等产量线 $I = f(l_1, k_1)$ 在该点的切线斜率（绝对值）。

从另一个角度来看，设想一种要素配置的变动组合 $(\Delta k, \Delta l)$，产量不变意味着他们带来的产量变动数值是相互抵消的：

$$\Delta k \cdot MP_k + \Delta l \cdot MP_l = 0$$

那么增加一单位生产要素 l 的投入量时所减少的另一种要素 k 的投入数量，即 l 对 k 的技术替代率还可以用二者的边际产品表示：

$$MRTS_{l,\,k} = \left|\frac{\Delta k}{\Delta l}\right| \tag{9-14}$$

技术替代率有什么意义呢？产量增加是人民群众喜闻乐见的事情，产量维持不变的前提下降低成本也是可喜可贺的。通过对不同要素技术替代率的分析，结合要素市场上

[①] 有的朋友遇到某对某的替代率就分不清分子分母，我看很多外文教材使用 $MRTS_{l\ \mathrm{for}\ k}$ 这个记号，也就是说“用单位数量 l 替换 k 的话，需 k 若干？”显然 k 应该做分母喽。

各种要素的价格差别，企业家可以通过变动要素配置在不伤害产量的前提下降低成本。具体的做法将在第50页9.10节进行说明。

2. 边际技术替代率递减规律

3. 替代弹性

$$\sigma = \frac{d(k/l)}{dMRTS} \cdot \frac{MRTS}{k/l} = \frac{\partial \ln(k/l)}{\partial \ln MRTS} = \frac{\partial \ln(k/l)}{\partial \ln(MP_l/MP_k)} \tag{9-15}$$

9.8 规模报酬

1. 产出弹性与生产力弹性

产出弹性

产出弹性（elasticity of output）是指在技术不变的条件下，若其他要素投入量不变，仅一种投入变动时，产出的相对变动对该要素投入相对变动之比。设生产函数为 $q = f(k, l)$，则劳动的产出弹性 E_l 与资本的产出弹性 E_k 可以表示成，

$$E_l = \frac{\Delta q}{q} \Big/ \frac{\Delta l}{l} = \frac{\Delta q}{\Delta l} \cdot \frac{l}{q} = \frac{MP_l}{AP_l} \tag{9-16}$$

$$E_k = \frac{\Delta q}{q} \Big/ \frac{\Delta k}{k} = \frac{\Delta q}{\Delta k} \cdot \frac{k}{q} = \frac{MP_k}{AP_k} \tag{9-17}$$

生产力弹性

生产力弹性（elasticity of productivity）是指在技术不变的条件下，所有要素投入量等比例变动时，产出的相对变动对要素投入的相对变动之比。设生产函数为 $q = f(k, l)$，要素向量为 $x = (k, l)$，其生产力弹性可以表示成，

$$E_e = \frac{dq}{q} \Big/ \frac{dk}{k} = \frac{dq}{dx} \cdot \frac{x}{q} \tag{9-18}$$

产出弹性与生产力弹性的关系：如果要素投入等比例变动，则生产力弹性等于各种要素投入的产出弹性之和。即对于生产函数 $q = f(k, l)$ 存在：

$$E_e = E_k + E_l \tag{9-19}$$

因为：

$$dq = \frac{\partial f}{\partial k} dk + \frac{\partial f}{\partial l} dl$$

且要素投入的变动比例相同：

$$\frac{dl}{l} = \frac{dk}{k} = \frac{dx}{x}$$

于是：

$$\begin{aligned} E_e = \frac{dq}{dx} \cdot \frac{x}{q} &= \frac{\partial q}{\partial k} \cdot \frac{dk}{\frac{dx}{x}} \cdot \frac{1}{q} + \frac{\partial q}{\partial l} \cdot \frac{dl}{\frac{dx}{x}} \cdot \frac{1}{q} \\ &= \frac{\partial q}{\partial k} \cdot \frac{dk}{\frac{dk}{k}} \cdot \frac{1}{q} + \frac{\partial q}{\partial l} \cdot \frac{dl}{\frac{dl}{l}} \cdot \frac{1}{q} \\ &= \frac{\partial q}{\partial k} \cdot \frac{k}{q} + \frac{\partial q}{\partial l} \cdot \frac{l}{q} \\ &= E_k + E_l \end{aligned} \tag{9-21}$$

2. 规模报酬

在长期生产中，所有生产要素投入都可以进行调整，要素的技术替代分析显示了在保持产量不变这个“可怜”的愿望中生产者对要素投入所能进行的变动。那么在技术不变（即生产函数不变）的限制之下，在等产量线凸性假设的基础上，同时增加所有要素投入势必将带来产量的提升。规模报酬便是分析企业在长期生产中所有要素等比增加时产量变化所表现的三种的特征：规模报酬不变、规模报酬递增和规模报酬递减。 规模报酬

假设企业长期生产函数为 $q = f(k,l)$，如果企业等比增加所有要素投入至 λ 倍，产量将变为 $f(\lambda k, \lambda l)$。[①]则对于对于任何 $\lambda > 1$：

- 若 $f(\lambda k, \lambda l) = \lambda f(k,l)$，即产量增加的比例等于各种生产要素增加的比例，规模报酬不变；
- 若 $f(\lambda k, \lambda l) > \lambda f(k,l)$，即产量增加的比例大于各种生产要素增加的比例，规模报酬递增；
- 若 $f(\lambda k, \lambda l) < \lambda f(k,l)$，即产量增加的比例小于各种生产要素增加的比例，规模报酬递减。

从生产力弹性的角度来看，因为 $E_e = \frac{dq}{q}/\frac{dx}{x} = \mu/\delta$，其中 δ 表示要素变动率，μ 表示产出变动率。显然规模报酬特征还可以表示为：

- 当 $E_e > 1$，即 $\mu > \delta$ 时，规模报酬递增；
- 当 $E_e < 1$，即 $\mu < \delta$ 时，规模报酬递减；
- 当 $E_e = 1$，即 $\mu = \delta$ 时，规模报酬不变。

在要素价格不变的情况下，生产函数的规模报酬还可以通过成本函数的总成本弹性或函数系数来分析，这将在第10章《成本》第59页进行。

3. 要素完全替代生产函数的规模报酬

对于常见的形如 $q = f(l,k) = \alpha l + \beta k$ 的线性生产函数，易得其规模报酬不变。但我们还是要刻意说明一下：要素技术替代率和规模报酬没有什么关系，二者同是对技术特征的反应，前者反映了一条等产量线的形状特征，后者反映了等产量面的陡峭程度。例如这个例子：

$$q = g[f(l,k)] = (\alpha l + \beta k)^{\gamma}$$

这里我们对常见的线性生产函数做了一个幂函数形式的单调变换，复合函数的存在并没哟影响某条等产量线的特征——技术替代率（函数）：

$$RTS = \frac{dk}{dl} = \frac{MP_l}{MP_k} = \left(\frac{\partial g}{\partial f}\frac{\partial f}{\partial l}\right)\bigg/\left(\frac{\partial g}{\partial f}\frac{\partial f}{\partial k}\right) = \frac{\partial f}{\partial l}\bigg/\frac{\partial f}{\partial k} = \frac{\alpha}{\beta}$$

但是规模报酬将取决于 γ 的取值：

$$\frac{q(\lambda l, \lambda k)}{\lambda q(l,k)} = \frac{(\alpha\lambda \cdot l + \beta\lambda \cdot k)^{\gamma}}{\lambda q(l,k)} = \frac{\lambda^{\gamma}(\alpha l + \beta k)^{\gamma}}{\lambda(\alpha l + \beta k)^{\gamma}} = \lambda^{\gamma - 1}$$

[①] 显然这里的 $\lambda > 1$，因为我们分析的生产规模扩大、要素投入等比增加的情况。高鸿业《西经》提供的 $\lambda < 0$ 条件与其结论的匹配显然是不严密的，不过我相信这不是个值得发帖讨论心路历程的话题。另外也可以用 $0 < \lambda < 1$ 作为条件来分析生产规模缩减过程中的规模报酬特征，这就会变成小学生的代数游戏——“妈妈，我考试得了负的 −100 分”，“我考了倒数老么”——别扭，虽然一丁点问题都木有。

其中 $\lambda > 1$，如果 $\gamma > 1$，表现为规模报酬递增；如果 $\gamma = 1$，表现为规模报酬不变；如果 $\gamma < 1$，表现为规模报酬递减。

4. Cobb–Douglas 生产函数的规模报酬

假设柯布道格拉斯生产函数

$$q = f(l, k) = Al^{\alpha}k^{\beta} \tag{9-22}$$

则

$$f(\lambda k, \lambda l) = A(\lambda l)^{\alpha}(\lambda k)^{\beta} = \lambda^{\alpha+\beta} f(l, k) \tag{9-23}$$

对于任何 $\lambda > 1$，若 $\alpha + \beta > 1$，规模报酬递增；若 $\alpha + \beta < 1$，规模报酬递减；若 $\alpha + \beta = 1$，规模报酬不变。

9.9 等成本线

类似消费者行为中的预算线，只是代表企业购买要素组合的能力，并不涉及最优分析。

9.10 最优的生产要素组合

推荐阅读

本章附录

齐次函数和位似函数

空

第 10 章　成本

10.1　怎样看待和衡量成本

1. 机会成本

定义 (机会成本) 在面临多方案择一决策时，被舍弃的选项中的最高价值者是本次决策的机会成本。■

草稿：opportunity cost opportunity lost，成本这个词语古已有之，至少在你学习经济学教科书之前就有了、就使用过。如果让你给经济活动的成本进行定义，你会不会把成本和花费联系起来，那么哪些花费该被划归经济学的范围。

草稿：生产函数吞进的要素的成本，而不是占有要素的成本。

以后提到的所有成本术语，潜台词都是从经济学的视角看待的成本，从机会成本的角度看待的成本。我们关注的是成本的来源——即要素，成本的数量——即次优的收益，而（暂时）不关注要素的所有者是谁，因为我们的研究目标是要素转变为产品的生产活动。

例如拍摄一部电影的成本是 4000 万人民币，这个数量对于穷人和富翁是不变的，即便你立刻可以从自己的账户支取 4000 万也不会使之拍摄电影这种生产活动的成本变为零。

为什么是 4000 万？因为拍摄电影的要素种类、价格是明确的——这里避免使用“确定的”以避免与“价格恒定”产生混淆。

为什么要素价格会明确为那个标准，或者说为什么要素会索要这个价格？因为他们为其他老板打工的最高价格就是这样，如果你不能满足他们，他们就会选择更优的渠道去实现自己的价格。一个更宽泛的假设是，即便他不从事影视行业他也会得到这个价格——虽然对于“人”这种要素来说很难重现。

机会成本又称为择一成本、替代性成本。机会成本对商业公司来说，可以是利用一定的时间或资源生产一种商品时，而失去的利用这些资源生产其他最佳替代品的机会就是机会成本。

在生活中，有些机会成本可用货币来衡量。例如，农民在获得更多土地时，如果选择养猪就不能选择养鸡，养猪的机会成本就是放弃养鸡的收益。但有些机会成本往往无法用货币衡量，例如，在图书馆看书学习还是享受电视剧带来的快乐之间进行选择。

而机会成本泛指一切在作出选择后其中一个最大的损失, 机会成本会随付出的代价改变而作出改变, 例如被舍弃掉的选项之喜爱程度或价值作出改变时, 而得到之价值是不会令机会成本改变的。

而如果在选择中放弃选择最高价值的选项 (首选), 那么其机会成本将会是首选。而作出选择时, 应该要选择最高价值的选项 (机会成本最低的选项), 而放弃选择机会成本最高的选项, 即失去越少越明智。

2. 显成本与隐成本

机会成本通常包括两部分：

1. 使用他人资源的机会成本，即付给资源拥有者的货币代价被称作显性成本。

2. 因为使用自有资源而放弃其他可能性中得到的最大回报的那个代价，也被称为隐性成本。

3. 经济成本与会计成本

机会成本与会计成本是两个不同的概念。

会计成本是指实际支付的货币成本。机会成本可能等于会计成本，也可能不等于会计成本。在完全竞争的条件下，机会成本等于会计成本；在商品 (或生产要素) 供应不足、实行配给的条件下，机会成本高于会计成本；在商品积压或要素闲置的条件下，机会成本低于会计成本，甚至为零。通常是在机会成本高于会计成本的情况下，使用机会成本的概念。

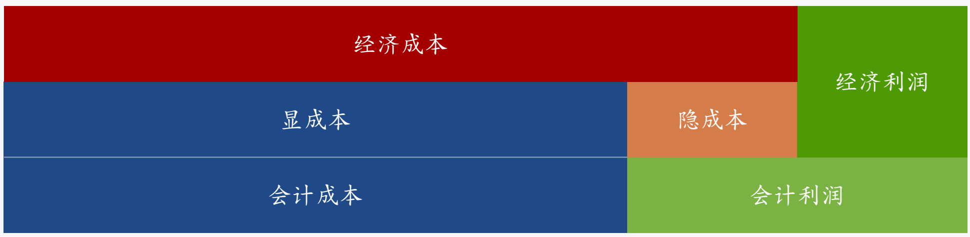


图 10.1: 机会成本角度的成本构成分析

4. 生产过程：长期与短期

在这里不能只理解到短期内不可变的成本成为固定成本，还要意识到后文的短期生产均衡中为什么用边际分析法讨论短期最优。

10.2　短期成本

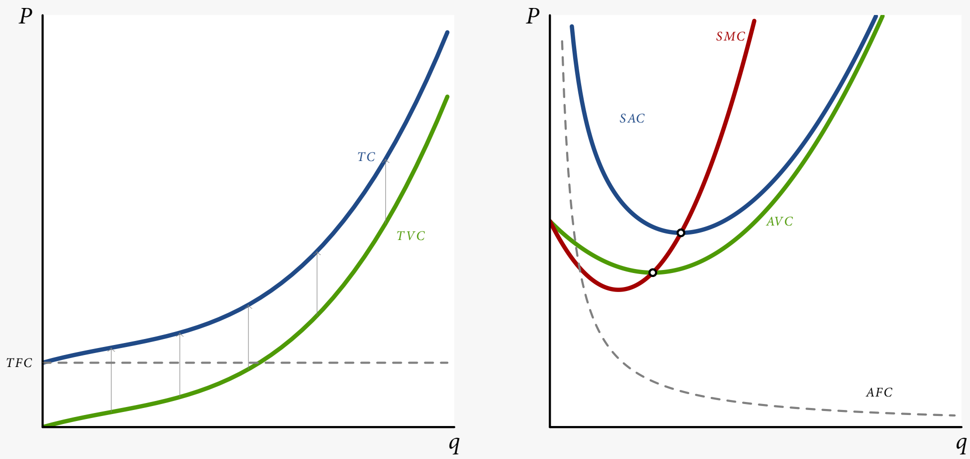
1. 平均成本和边际成本（三叉戟）

如图（10.2）当 $MC < AC$ 的时候，AC 呈递减趋势；$MC > AC$ 的时候，AC 呈递增趋势；$MC = AC$ 的时候，AC 达到最低点，总有 MC 交 AC 于 AC 的最低点[1]。二者的关系可以表示为：

$$AC = \frac{dAC}{dq} = \frac{MC - AC}{q} \tag{10-1}$$

也就是说 MC 曲线的变化要敏感于 AC 曲线的变化：不管上升或是下降，MC 都要先于 AC 表现出来。在 MC 交于 AC 最低点后，MC 会拉动 AC 一起上升；在交点之前，MC 会拉 AC 一起下降。相关推导参看第57页的附录。

[1] 注意：边际值与平均值交与后者的最低点只是特例，普遍关系是边际值对平均值的拉动关系，参见第57页附录10.3



(a) 总成本 (b) 平均成本和边际成本

图 10.2: 短期生产成本曲线

将 TVC 曲线向上平移 TFC 个单位即可得到 TC 曲线。SMC、SAC、AVC 可以是 U 型的，且 SMC 经过 SAC、AVC 的最低点。AFC 总是递减的。

2. 为什么短期供给曲线积分之后是总可变成本而非总成本

短期总成本分为两部分，一是固定要素的总固定成本，而是可变要素的总可变成本，总成本的变化即边际成本完全是由可变要素带来的，故而边际成本加总之后只代表总可变成本。教学的话可以举小船排水量的例子：一只小船空船排水量为 5，满载 3 人，每人排水量为 1，则满载排水量（总排水）为 $5+1+1+1=8$，边际排水量之和为 $1+1+1=3$，固定排水量为 5。

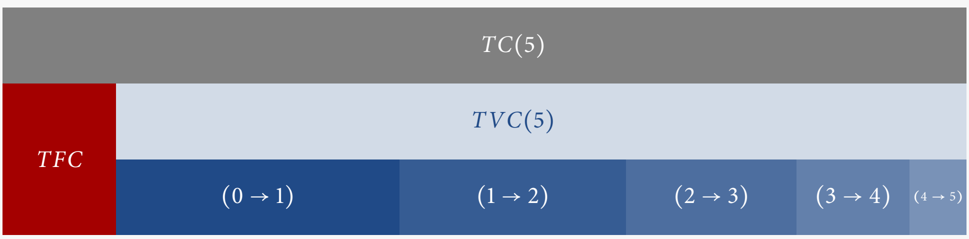


图 10.3: 短期成本分析

根据牛顿—莱布尼茨公式，假如 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，

$$\int_a^b f(x) = F(b) - F(a),$$

而 TC 和 TVC 都是 SMC 的原函数，

$$TC(q) = TFC + TVC(q)$$

其中 TFC 为常数（$TFC = TC(0)$），则

$$\frac{dTC(q)}{dq} = \frac{dTVC(q)}{dq} = SMC(q)$$

故而，

$$\int_0^{q^*} SMC(q) = TC(q^*) - TC(0) = TVC(q^*)。$$

10.3 长期成本

推荐阅读

1. sallyax24. (2005-11-23). 边际成本与平均成本的关系. from http://bbs.pinggu.org/thread-57129-1-1.html

2. J 皮尔庞特 M. (2011-9-29). 边际成本下降时，平均成本为什么有可能上升. from http://bbs.pinggu.org/thread-1192150-1-1.html

3. 空城. (2012-4-17). 高手求教 MC 上升的时候 AC 曲线也上升么. from http://bbs.pinggu.org/thread-1418817-1-1.html

本章附录

连续函数和离散函数

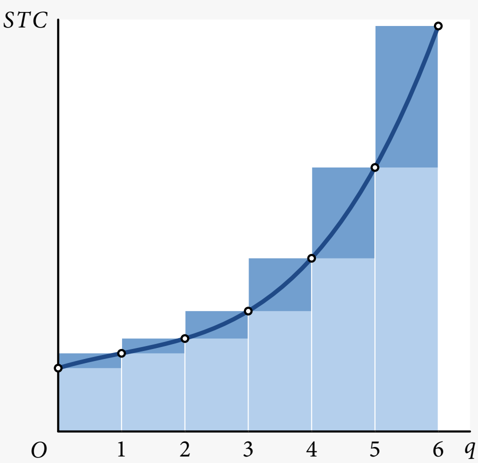
草稿：有待用高低区间进行重新解释。

假设短期总成本函数为 $STC(q)=\frac{1}{3}x^3-x^2+3x+10$，其边际成本函数为 $SMC(q)=x^2-2x+3$；在离散的情况下，短期总成本函数为 $STC(n)=\frac{1}{3}n^3-n^2+3n+10$，其边际成本函数为 $SMC(n)=STC(n)-STC(n-1)=n^2-n-\frac{2}{3}$，且 $STC(0)=0$。

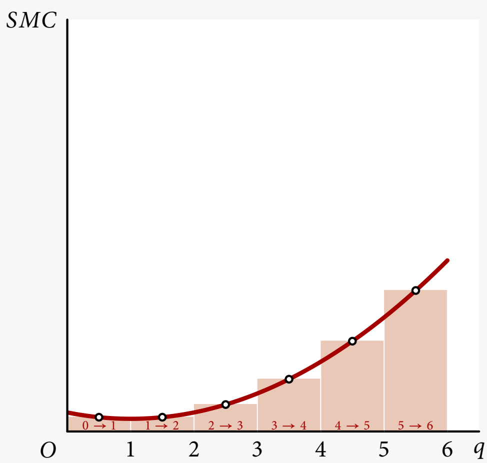
显然当 $q=n$ 的时候 $SMC(q)$ 与 $SMC(n)$ 两种结果可能不一致，但通过在区间 $[n-1,n]$ 上个点的导数和端点 $n-1$、n 差商的关系的理解可以将上述矛盾统一起来：

$$\frac{\int_{n-1}^{n} MC(q)dq}{n-(n-1)}=STC(n)-STC(n-1)=MC(n),$$

即瞬时变化率和平均变化率的关系。



(a) 总成本



(b) 边际成本

图 10.4: 连续成本和离散成本

草稿：图示也可以参考扫缪尔森 18 版 96、112 页。

平均函数和边际函数

第一个例子：一量杯盐水 A 浓度 50%，用滴管添加盐水溶液 B：如果 B>A，混合溶液比原来咸了；如果 B<A，淡了。滴管中的浓度就是 marginal，量杯中的浓度就是 average。

第二个例子：校篮球队平均身高 1.80 米，纳新一人，如果这人身高大于 1.80 米则使得新团队平均身高上升，反之下降。每名新加入队员的身高就是就是 marginal。

假设平均函数为 $AY=f(x)$，则总量函数可以表示为 $Y=xf(x)$，得到边际函数：

$$MY=\frac{dY}{dx}=\frac{d[xf(x)]}{dx}=\frac{dx}{dx}\cdot f(x)+\frac{df(x)}{dx}\cdot x=AY+\frac{df(x)}{dx}\cdot x$$

于是，平均函数的斜率可以表示为：

$$AY'=\frac{df(x)}{dx}=\frac{MY-AY}{x} \tag{10-2}$$

这就是平均函数与边际函数的一般特征。而我们常说的“MC 与 AC 交与后者的最低点”只是 $x > 0$ 时平均值与边际值普遍关系的一种特例。例如：假定总量函数为 $y = x^2$，则边际函数 $y_m = 2x$ 与平均函数 $y_a = x$ 就不再表现这个特征。我承认这个说法包含着对代数机巧的夸大——毕竟产量 q 通常是正数——但这种矛盾并非不会遇到[①]。

教科书在处理离散问题的边际数量时，有时会把边际数量说成“x 变动至 x_0 过程中的最后一单位带来的 y 的变动”，有时又会说成“x_0 变动为下一单位带来的 y 的变动”。第一种说法是以“低区间”来定义，第二种是以“高区间”来定义。赫舒拉发推荐以二者的平均数来表示 x_0 所对应的边际数量，即 $x_0 - 1$ 到 $x_0 + 1$ 区间的边际变化的平均值，本质上是将离散数据向连续函数逼近。

事实上在离散分析中，“某个确定产量的边际成本”是没有意义的。在决策分析中，往往使用高区间或低区间的边际变化来判断是否利损。

以利润最大化分析为例，对于某个既定的产量 q 我们用记号 $MR_{(q-1)\to q}$ 或 $MR^-(q)$ 表示低区间的边际收益；用记号 $MR_{q\to(q+1)}$ 或 $MR^+(q)$ 表示高区间的边际收益。存在 (q, R) 序列：$(1, 9)$、$(2, 16)$、$(3, 21)$，边际成本恒为 6，请用边际分析法判断 $q = 2$ 是否为利润最大化的产量?

- 产量在低区间 $2 \to 1$ 上损失的边际收益是 $MR_{1\to2} = 16 - 9 = 7$，节约的边际成本 $MC = 6$，减产的话带来边际利润为 –1，故而不应减产；
- 在高区间 $2 \to 3$ 上获得的边际收益是 $MR_{2\to3} = 21 - 16 = 5$，付出的边际成本是 $MC = 6$，增产的话带来边际利润 –1，故而不应增产；
- $q = 2$ 时没有调整产量增加利润的余地，是利润最大化的产量。

进退原则：如果只能进行离散的选择，对于某个自变量数值，“高区间”的边际收益小于边际成本。“低区间”的边际收益大于边际成本时，达到最优。

短期成本、收益、利润关系图

图（10.5），主要用来从不同角度看待短期总成本的组成部分以及各部分的关系。在这里重申“机会成本”不是某一项成本组成，它只是经济学用来衡量某项要素投入带来成本量的天平、一种方法、一种视角。

这个图是以总收益为着眼点对等价转换为总收益的成本、利润进行各种角度的分解。使用方法：

- 任何一“行”加总之后等于总收益；
- 两行之间等长的元素或元素组合说明在这两种分析角度他们是等量的；
- 我们会说两个经济量相等，例如“收益恰等于成本，利润为零”；但不要说“收益包含了成本，……”是就是是，等于就是等于。

通过改图可以清晰地了解到：

- 第二行：固定成本 + 总可变成本 + 经济利润 = 总收益；
- 第三行：固定成本 + 边际成本加总 + 经济利润 = 总收益；
- 第二三行：边际成本加总 = 总可变成本 ≠ 总成本；

① netbus888. (2012-5-4). 关于柯布道格拉斯函数的成本问题 Retrieved 2012-6-19, from http://bbs.pinggu.org/thread-1430572-1-1.html

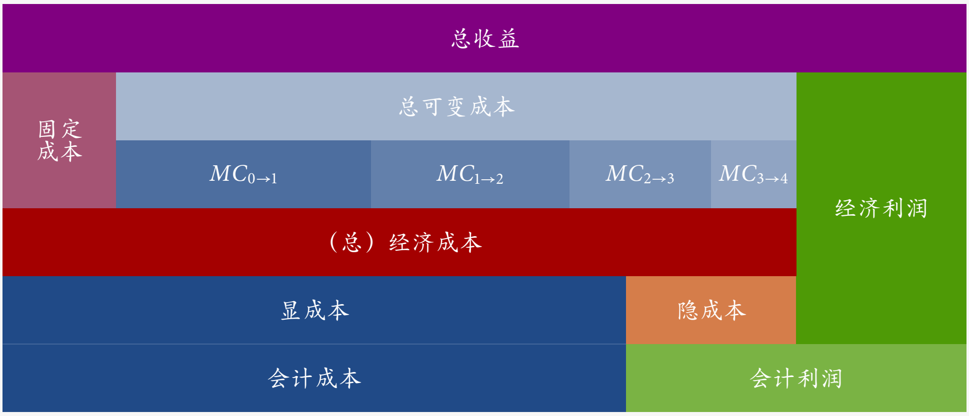


图 10.5: 成本关系框图

图（10.1）与图（10.3）的综合，本笔记也以本图作为封面。

- 第四行：总经济成本 + 经济利润 = 总收益，意在说明：经济利润 = 总收益 − 总经济成本；
- 第五行：显成本 + 隐成本 + 经济利润 = 总收益；
- 第四五行：显成本 + 隐成本 = 总经济成本；
- 第六行：会计成本 + 会计利润 = 总收益，会计利润 = 总收益 − 会计成本；
- 第五六行：会计成本 = 显成本 = 总经济成本 − 隐成本；会计利润 − 经济利润 = 隐成本。

成本弹性

成本弹性与函数系数被用来分析产出与投入以及产出与成本之间的关系。

成本弹性分位总成本弹性与平均成本弹性。

总成本弹性用来测度总成本变动对于产出变动的敏感程度；即当产出变动 1% 的时候总成本变动的百分比。

设连续可导的总成本函数为

$$c = f(q)$$

则总成本弹性 k 可以表示为

$$k = \frac{dc}{c}\bigg/\frac{dq}{q} = \frac{dc}{dq}\frac{c}{q} = \frac{MC}{AC} \tag{10-3}$$

平均成本弹性用来测度平均成本变动对于产出变动的敏感程度；即当产出变动 1% 的时候平均成本变动的百分比。

对于上述成本函数，其平均成本弹性 k_a 可以表示为

$$\begin{aligned} k_a &= \frac{d(c/q)}{c/q}\bigg/\frac{dq}{q} = \frac{d(c/q)}{dq}\cdot\frac{q^2}{c} \\ &= \frac{dc}{dq}\cdot\frac{c}{q} - 1 = \frac{MC}{AC} - 1 = k - 1 \end{aligned} \tag{10-5}$$

函数系数表示当所有生产要素投入按照相同比例变化时所导致的产出比例的变化。对于连续可导的生产函数

$$q = f(l, k)$$

而言，函数系数 μ 可以表示为

$$\mu = \frac{dq}{q} \Big/ \lambda \tag{10-6}$$

其中 λ 为要素投入变动比例。

函数系数与总成本弹性互为倒数，即

$$\mu = 1/k \tag{10-7}$$

函数系数 μ 可用来判断对应生产函数的规模报酬情况：若 $\mu > 1$，规模报酬递增；$\mu = 1$，规模报酬不变；$\mu < 1$，规模报酬递减。

若 $\mu > 1$，在要素价格不变的条件下，规模报酬递增表示若要素投入数量扩大一倍，总成本也扩大一倍，产出扩大大于一倍。反过来看，由式（10-7）可知，若 $\mu > 1$ 则 $k < 1$，意味着产出扩大一倍所需的要素投入扩大倍数小于一，总成本扩大倍数也小于一。

第 11 章　利润最大化

11.1　最优产量选择

假定总收益 $TR(q)$、总成本 $TC(q)$ 均仅为产量 q 的函数，则总利润 $\pi(q)$ 函数可以表示为

$$\pi(q) = TR(q) - TC(q)$$

欲图得到最大利润，则要找到 $\pi(q)$ 的极大值，其一阶条件必须满足：

$$\frac{d\pi}{dq} = \frac{dTR}{dq} - \frac{dTC}{dq} = MR - MC = 0$$

并且满足一阶条件的产量 q^* 必须满足二阶条件：

$$\left.\frac{d^2\pi}{dq^2}\right|_{q=q^*} = \left.\frac{d\pi'}{dq}\right|_{q=q^*} < 0$$

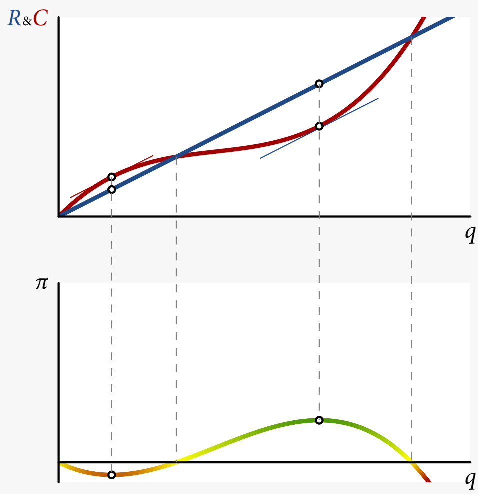


图 11.1: 利润最大化的条件

利润最大化的产量点，收益曲线的切线与成本曲线的切线是平行的，还要排除 $C > R$ 的点。注意：图示中产品价格是固定的，故而收益曲线为直线。

11.2　库恩—塔克条件

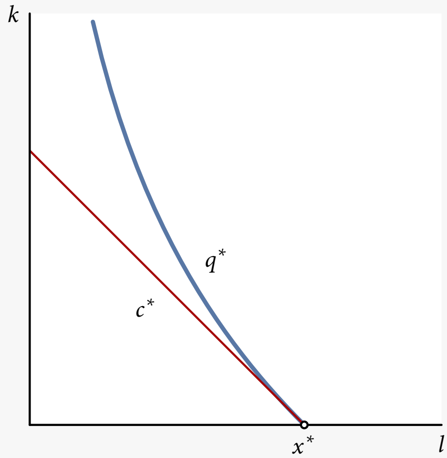


图 11.2: 库恩塔克条件与边角解

推荐阅读

第 12 章　厂商的要素选择

12.1　既定产量下的成本最小化

$$\min c = wl + rk$$
$$\text{s.t. } q^* = f(l,k) \tag{12-2}$$

如果任何一种要素价格上升则最小成本必上升：如果一种要素变得更贵而另外一种要素的价格不变，最小成本不可能下降，一般会上升[①]；类似地，如果企业决定生产更多的产量而且所有要素价格维持不变，则企业的成本必然上升。

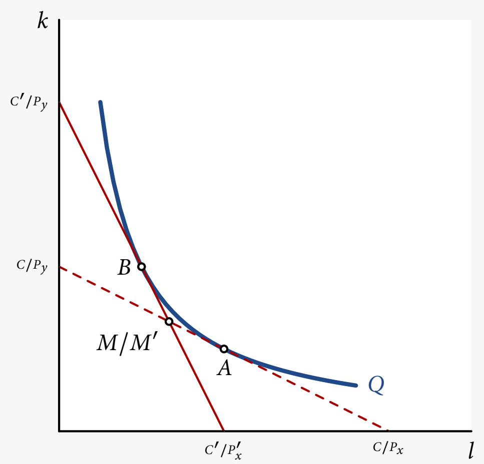


图 12.1: 产量不变，一种要素价格上涨，总成本上涨

12.2　既定成本下的产量最大化

$$\max q = f(l,k)$$
$$\text{s.t. } c^* = wl + rk \tag{12-4}$$

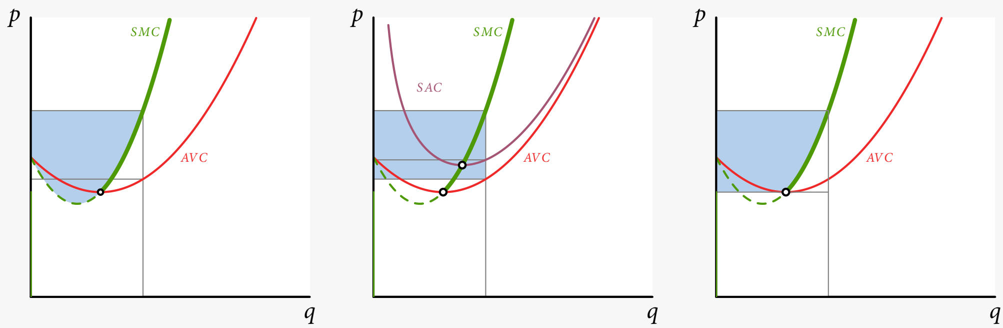
① Varian, H. R. (2010). *Intermediate Microeconomics A Modern Approach* (8 ed.). W. W. Norton: 369.

推荐阅读

第 13 章　生产者供给

13.1　生产函数

测试文本



(a) SMC 以上价格线以下　(b) $TR - TVC$　(c) 供给曲线以左

图 13.1: 生产者剩余

推荐阅读

空

第 14 章　完全竞争市场

14.1　剩余需求的价格弹性

对某企业 i 的剩余需求函数为：

$$D_i(p) = D(p)S_0(p) \tag{14-1}$$

对于 p 求导，

$$\frac{dD_i}{dp} \cdot \frac{p}{q} = \frac{dD}{dp} \cdot \frac{p}{Q} \cdot \frac{Q}{q} - \frac{dS_0}{dp} \cdot \frac{p}{Q_0} \cdot \frac{Q_0}{q} \tag{14-2}$$

$$\varepsilon_i = n\varepsilon - (n-1)\eta_0 \tag{14-3}$$

推荐阅读

空

第 15 章　不完全竞争市场

推荐阅读

空

第 16 章　要素市场

16.1　经济租金

推荐阅读

空

第 17 章　劳动市场

推荐阅读

空

第 18 章　资本与时间

推荐阅读

空

参考文献

[1] Gordon, S. (1982). Why Did Marshall Transpose the Axes? *Eastern Economic Journal*, 8(1), 31–45.

[2] Hoy, M., Livernois, J., McKenna, C., Rees, R., & Stengos, T. (2001). The Slutsky Equation *Mathematics for Economics* (2 ed., pp. 654–658): The MIT Press.

[3] 柯朗 R, 约翰 F. 微积分和数学分析引论 [M]. 张鸿林, 周民强, 译. 北京: 科学出版社, 2001.

[4] 肖红叶. 高级微观经济学 [M]. 北京: 中国金融出版社, 2003.

[5] 亨德森, 匡特. 中级微观经济理论——数学方法 [M]. 原书第 3 版 ed. 北京: 北京大学出版社, 1988.

[6] 亨德森, 匡特. 微观经济理论——数理分析方法 [M]. 上海: 上海译文出版社, 1992.

[7] Gravelle, H., & Rees, R. (2004). Microeconomics (3 ed.): Prentice Hall.

空

索引

Project Home