目录

第一章　函数、图像和直线

没有函数的微积分是一件最无意义的事情。如果要列出微积分的要素，那么函数会排在最前面，而且是以很大的优势排在前面的。因此，本书的前两章旨在让你温习函数的主要特征。本章包含对以下主题的回顾。

- 函数：其定义域、上域、值域和垂线检验；
- 反函数和水平线检验；
- 函数的复合；
- 奇函数和偶函数；
- 线性函数和多项式的图像，以及对有理函数、指数函数和对数函数图像的简单回顾；
- 如何处理绝对值。

下一章会涉及三角函数。好啦，就让我们开始吧，一起来回顾一下到底什么是函数。

1.1　函数

函数是将一个对象转化为另一个对象的规则。起始对象成为**输入**，来自称为**定义域**的集合。返回的对象称为**输出**，来自称为**上域**的集合。

来看一些函数的例子吧。

- 假设你写出 $f(x) = x^2$，这就定义了一个函数 f，它会将任何数变为自己的平方。由于你没有说明其定义域或上域，我们不妨假设他们都属于 $\mathbb{R}$，即所有实数的集合。这样，你就可以将任何实数平方，并得到一个实

数。例如，f 将 2 变为 4、将 $-1/2$ 变为 $1/4$，将 1 变为 1。最后一个变换根本没有什么变化，但这没问题，因为转变后的对象不需要有别于原始对象。当你写出 $f(2) = 4$ 的时候，这实际上意味着 f 将 2 变为 4. 顺便要说的是，f 是一个变换规则，而 $f(x)$ 是把这个变换规则应用于变量 x 后得到的结果。因此，说"$f(x)$ 是一个函数"是不正确的，应该说"f 是一个函数"。

- 现在，令 $g(x) = x^2$，其定义域仅包含大于或等于零的数（这样的数称为**非负的**）。它看上去好像和函数 f 一样的，但实际不同，因为定义域不同。例如，$f(1 - /2) = 1/4$，但 $g(-1/2)$ 却是没有定义的。函数 g 会拒绝非其定义域中的一切。由于 g 和 f 有相同的规则，但 g 的定义域小于 f 的定义域，因为我们说 g 是由**限制** f 的定义域产生的。

- 仍然令 $f(x) = x^2$，f(马) 会是什么呢？这显然是无定义的，因为你不能平方一匹马呀。另一方面，让我们指定"$h(x) = x$ 的腿的个数"，其中 h 的定义域是所有动物的集合。这样一来，我们就会得到 h(马) $= 4, h$(蚂蚁) $= 6, h$(鲑鱼) $= 0$. 因为动物腿的个数不会是负数或者分数，所以其上域可以使所有非负整数的集合。顺便问一下，$h(2)$ 会是什么呢？当然，这也是没有定义的，因为 2 不在其定义域内。"2"究竟会有几条腿呢？这个问题实际上没有任何意义。你或许也可以认为 h(椅子) $= 4$, 因为多数椅子都有四条腿，但这也没有意义，因为椅子不是动物，所以"椅子"不在 h 的定义域当中。也就是说，h(椅子) 是没有定义的。

- 假设你有一条狗，它叫 Junkster。可怜的 Junkster 不行患有消化不良症。它吃点东西，嚼一会儿，消化食物，可每次都失败，都会吐出来。Junkster 将食物都变成了……我们可以令"$j(x) =$ 当 Junkster 吃 x 时呕吐物的颜色"，其中 j 的定义域是 Junkster 所要吃的食物的集合。其上域是所有颜色的集合。为了使之有效，我们必须认为如果 Junkster 吃了玉米面卷，它的呕吐物始终是一种颜色（假设是红色的吧）。如果有时候是红色的，而有时候是绿色的，那就不太好了。**一个函数必须给每一个有效的输入制定唯一的输出**。

现在，我们要来看看函数**值域**的概念。值域是所有可能的输出所组成的集合。你可以认为函数转变其定义域中的一切，每次转变一个对象；转变后的对象所组成的集合称作值域。可能会重复，但这也没什么。

那么，为什么值域和上域不是一回事呢？值域实际上是上域的一个子集。上域是**可能**输出的集合，而值域则是**实际**输出的集合。下面给出上述函数的值域。

- 如果 $f(x) = x^2$，其定义域和上域均为 $\mathbb{R}$，其值域是非负数的集合。毕竟，平方一个数，其结果不可能是负数。那你又如何知道值域是**所有**的非负数呢？如果平方每一个书，结果一定包含所有的非负数。例如，平方 $\sqrt{2}$（或 $-\sqrt{2}$）结果都是 2。

- 如果 $g(x) = x^2$，其中，g 的定义域仅为非负数，但其上域仍是所有实数 $\mathbb{R}$，其值域又是非负数的集合。当平方每一个非负数时，结果仍然会包括所有的非负数。

- 如果 $h(x)$ 是动物 x 的腿的个数，那么其值域就是**任何**动物可能会有的腿的个数的集合。我们可以想到有 0、2、4、6 和 8 条腿的动物，也有一些有更多条腿的爬行动物。如果你还想到了个别的像失去一条或多条腿的动物，也可以将 1、3、5 和 7 等其他可能的数加入其值域。不管怎样，这个函数的值域并不是很清晰，要想了解真实的答案，你或许必须得是一位生物学家。

- 最后，如果 $j(x)$ 是当 Junkster 吃 x 的呕吐物的颜色，那么其值域就会包含所有可能的呕吐物的颜色。我很怕去想它们会是什么样的，但或许亮蓝色不在其中吧。

1.1.1 区间表示法

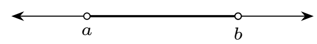
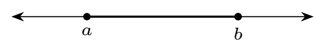
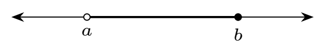
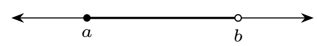
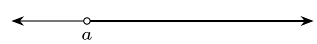
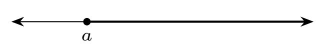
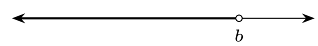
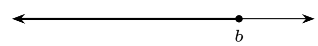
在本书剩余部分，我们的函数总有上域 $\mathbb{R}$，并且其定义域总会尽可能和 $\mathbb{R}$ 差不多（除非另有说明）。因此，我们会经常涉及实轴的子集，尤其是像 $\{x : 2 \leqslant x < 5\}$ 这样的相连区间。像这样写出完整的集合有点烦，但总比说"介于 2 和 5 之间的所有书，包括 2 但不包括 5"要强。使用区间表示法会让我们做的更好。

我们写出 $[a, b]$ 是指从 a 到 b 端点间的所有实数，包括 a 和 b。所以 $[a, b]$ 指的是所有使得 $a \leqslant x \leqslant b$ 成立的 x 的集合。例如，$[2, 5]$ 是所有介于 2 和 5 之间（包括 2 和 5）的实数的集合。（它不仅仅包括 2、3、4 和 5，不要忘记还有一大堆处于 2 和 5 之间的分数和无理数，比如 5/2、$\sqrt{7}$ 和 π。）像 $[a, b]$ 这种形式表示的区间我们称作**闭区间**。

如果你不想包括端点，把方括号变为圆括弧就行了。所以，(a, b) 指的是介于 a 和 b 之间、但不包括 a 和 b 的所有实数的集合。这样，如果 x 在区间 (a, b) 中，我们就知道 $a < x < b$。集合 (a, b) 表示介于 2 和 5 之间、但不包括 2 和 5 的所有实数。像 (a, b) 这种形式表示的区间我们称作**开区间**。

你也可以混合匹配：$[a, b)$ 指的是介于 a 和 b 之间、包括 a 但不包括 b 的所有实数的集合；$(a, b]$ 包括 b，但不包括 a。这些区间在一个端点处是闭的，而在另一个端点处是开的。有时候，像这样的区间我们称作**半开区间**。上述的 $\{x : 2 \leqslant x < 5\}$ 就是一个例子，也可以写成 $[2, 5)$。

还有一个有用的记号就是 (a, ∞)，它是指大于 a 但不包括 a 的所有数；$[a, \infty)$ 也一样，只是它包括 a。还有 3 个涉及 $-\infty$ 的可能性。总而言之，情况如下。

(a, b)	$\{x : a < x < b\}$	
$[a, b]$	$\{x : a \leqslant x \leqslant b\}$	
$(a, b]$	$\{x : a < x \leqslant b\}$	
$[a, b)$	$\{x : a \leqslant x < b\}$	
(a, ∞)	$\{x : x > a\}$	
$[a, \infty)$	$\{x : x \geqslant a\}$	
$(-\infty, b)$	$\{x : x < b\}$	
$(-\infty, b]$	$\{x : x \leqslant b\}$	
$(-\infty, \infty)$	$\mathbb{R}$	

1.1.2　求定义域

有时候，函数的定义中包括了定义域。（确实如此，比如 1.1 节中的函数 g。）然而，大多数情况下，定义域是没有给出的。按照惯例，定义域包括尽可能多的实数集合。例如，$k(x) = \sqrt{x}$，其定义域就不可能是 $\mathbb{R}$ 中的所有实数，因为不可能得到一个负数的平方根。其定义域一定是 $[0, \infty)$，就是大于或等于 0 的所有实数的集合。

好了，我们知道取负数的平方根会出问题。那么，还有什么会把问题搞糟呢？以下是 3 种最常见的情况：

(1) 分数的平方根不能是零。

(2) 不能取一个负数的平方根（或四次根、六次根，等等）。

(3) 不能取一个负数或零的对数。（还记得对数函数吗？如果忘了，就请看看第 9 章！）

或许你还记得 $\tan(90^\circ)$ 也是这个问题，但这实际上是上述第一项的特例。你看，

$$\tan(90^\circ) = \frac{\sin(90^\circ)}{\cos(90^\circ)} = \frac{1}{0},$$

所以，$\tan(90^\circ)$ 是无定义的，实际上是因为其隐藏的分母为零。这里还有一个例子：

如果我们定义

$$f(x) = \frac{\log_{10}(x+8)\sqrt{26-2x}}{(x-2)(x+19)},$$

那么，f 的定义域是什么呢？当然，为了使 $f(x)$ 有意义，以下是我们必须要做的。

- 我们需要取 $(26+2x)$ 的平方根，所以，这个量必须是非负的。也就是说，$26-2x \geqslant 0$。还可以写成 $x \leqslant 13$。
- 我们也需要取 $(x+8)$ 的对数，所以，这个量必须是正的。（注意对数和平方根的区别：可以取 0 的平方根，但不能取 0 的对数。）不管怎么说，我们需要 $x+8>0$，所以 $x>-8$。到现在为止，我们知道 $-8<x\leqslant 13$，所以，定义域最多是 $(-8,13]$。
- 分母不能为 0，这就是说 $(x-2)\neq 0$ 且 $(x+19)\neq 0$。换句话说，$x\neq 2$ 且 $x\neq -19$。最后一个条件不是问题，因为我们已经知道 x 处于 $(-8,13]$ 内，所以 x 不可能是 -19。我们还应该把 2 去掉。

这样，我们就找到了其定义域是除了 2 意外的集合，$(8,13]$。这个集合可以写作 $(-8,13]\setminus\{2\}$，这里的反斜杠表示“不包括”。

1.1.3 利用图像求值域

让我们来定义一个新的函数 F，指定其定义域为 $[-2,1]$，并且 $F(x)=x^2$ 在此定义域上。（记住，我们看到的任何函数的上域总是所有实数的集合。）其中，对于所有的实数 x，$f(x)=x^2$，F 和 f 是同一个函数吗？回答是否定的，因为两个函数的定义域相同（尽管他们有相同的函数规则）。正如 1.1 节中的函数 g，函数 F 是由限制 f 的定义域得到的。

现在，F 的值域又是什么呢？如果你将 -2 到 1 之间（包括 -2 和 1）的每一个实数平方的话，会发生什么呢？你应该有能力直接求解，但这是观察如

何利用图像来求一个函数的值域的很好机会。基本思想就是画出函数图像，然后想象从图像的左边和右边很远的地方朝 y 轴的水平的射入两束亮光。曲线会在 y 轴上有两个影子，一个在 y 轴左侧，另一个在 y 轴右侧。值域就是影子并集；也就是说，如果 y 轴上的任意一点在左侧或是右侧的影子里，那么它处于函数的值域中。我们以函数 F 为例来看一下图 1.1 这是怎么运作的吧。

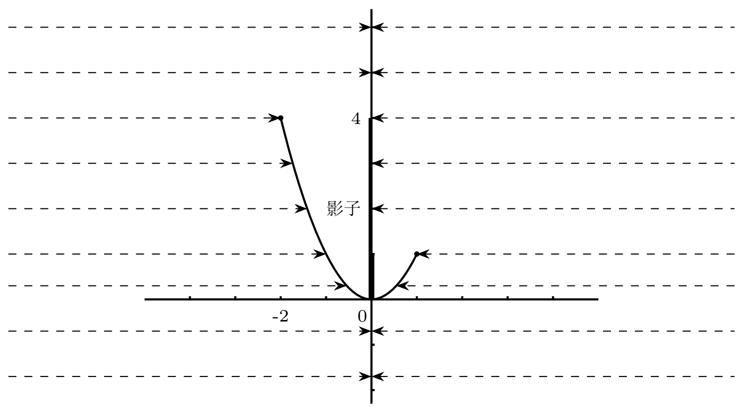


图 1.1

图 1.1 中左侧的影子覆盖了在 y 轴从 0 到 4（包括 0 和 4）的所有点，也就是 $[0,4]$；另一方面，右侧的影子覆盖了从 0 到 1（包括 0 和 1）的所有点，也就是 $[0,1]$。右侧的影子没有任何其他的贡献，全部的覆盖范围仍然是 $[0,4]$。这就是函数 F 的值域。

1.1.4 垂线检验

在上一节中，我们利用一个函数的图像来求其值域。函数的图像非常重要：它真正地展示了函数“看起来是什么样子的”。在第 12 章，我们将会看到画图技巧，但现在，我很想提醒你注意的是垂线检验。

你可以在坐标平面上画任何你想画的图形，但结果可能不是一个函数的图像。所以，函数的图像有什么特别之处呢？或者说，什么是函数 f 的图像呢？它是所有坐标为 $(x, f(x))$ 的点的集合，其中，x 在 f 的定义域中。还有另外一种方式来看待它：我们以某个实数 x 开始。如果 x 在定义域中，你就画 $(x, f(x))$，它自然是，在 x 轴上的点 x 的正上方，高度为 $f(x)$。如果 x 没有在定义域中，你不能画任何点。现在，对于每一个实数 x，我们重复这个过程，从

而构造出函数的图像。

这里有个重要的思想：你不可能有两个点有相同的 x 坐标。换句话说，在图像上没有两个点会落在相对于 x 轴的同一条垂线上。要不然，你又将如何知道在点 x 上方的两个或多个高度的店中，哪一个是对应于 $f(x)$ 的值呢？这样，就有了**垂线检验**：如果你有某个图像并且想知道它是否是函数的图像，就来看看是否任何的垂线和图像相交多于一次。如果是这样的话，那它就不是函数的图像；反之，如果没有一条垂线和图像相交多于一次，那么你的确是在处理函数的图像。例如，以原点为中心，半径为 3 的圆的图像，如图 1.2 所示。

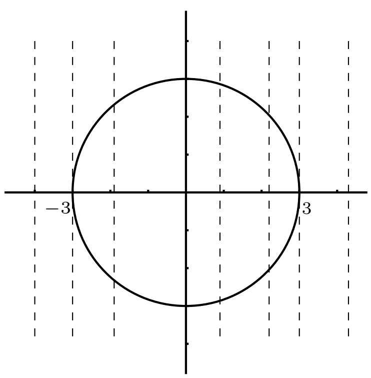


图 1.2

这么普通的对象应该是个函数，对吗？不对，让我们进行如图所示的垂线检验。当然，在 -3 的左边或是 3 的右边都没有问题（垂线甚至都没有击中图像），这很好。就连 -3 或 3 上，垂线和图像也仅仅有一次相交，这也很好。问题出在 x 落在区间 $(-3, 3)$ 上时。对于这其中的任意 x 值，垂线都通过 $(x, 0)$ 和圆相交两次，这就扭曲了圆的潜在函数特质。你不知道 $f(x)$ 到底是对应上方的点还是下方的点。

最好的解决办法是把圆分成上下两个半圆，并只选择上一半或者下一半。整个圆的方程是 $x^2 + y^2 = 9$，然而，上半圆的方程是 $y = \sqrt{9 - x^2}$，下半圆的方程是 $y = -\sqrt{9 - x^2}$。这最后两个就是函数了，定义域都是 $[-3, 3]$。你可以以不同的方式来分割，实际上，你不是必须要把它分成半圆（可以分割并改变上半圆和下半圆，只要不违反垂线检验就行了。）例如，图 1.3 也是一个函数的图像，其定义域也是 $[-3, 3]$：

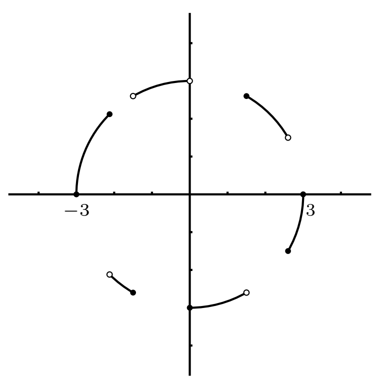


图 1.3

垂线检验通过，所以这确实是一个函数的图像。

1.2 反函数

我们假设有一个函数 f。你给了它一个输入 x;如果 x 在 f 的定义域中,就能得到一个输出,我们称它为 $f(x)$。现在,我们把这个过程倒过来,并问:如果你选一个实数 y,那么应该赋予 f 什么样的输入才能得到这个输出 y 呢?

用数学语言来陈述这个问题就是:给定一个实数 y,那么在 f 定义域中的哪个 x 满足 $f(x) = y$?首先要注意的是,y 必须在 f 的值域中。否则,根据定义,将不再有 x 的值使得 $f(x) = y$ 成立了。在 f 定义域中也许没有这样的 x 满足 $f(x) = y$,因为值域是**所有**的可能输出。

另一方面,如果 y 在值域当中,也可能会有很多值都满足 $f(x) = y$。例如 $f(x) = x^2$(其定义域为 $\mathbb{R}$),我们的问题是 x 取何值时会输出 64. 很显然,有两个 x 的值:8 和 -8。另外,如果 $g(x) = x^3$,对于相同的问题,这是只有一个 x 的值,就是 4. 对于我们赋予 g 的任意一个实数去做交换,结果都是一样的,因为任何数都只有一个(实数)立方根。

所以,这里有一种情形:给定一个函数 f,我们在 f 的值域中选择 y。在理想状况下,仅有一个 x 值满足 $f(x) = y$。如果上述理想状况对于值域中的每一个 y 来说都成立,那么就可以定义一个新的函数,它将逆转变换。我们以输出 y 开始,这个新的函数发现一个且仅有一个输入 x 满足 $f(x) = y$。这和个新的函数称为 f 的**反函数**,写作 f^{-1}。以下是使用数学语言对上述情况的总结。