1 测试定理

本文分享的是关于定理定义与推论等的设计方法与设计展示，以最为简单的定理定义为例子进行样式的展示。

◆ 定义 1.1

在 (a,b) 上给定函数 $f(x)$，$x_0 \in (a,b)$，若

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0), \tag{1}$$

则称函数 $f(x)$ 在 x_0 点连续，x_0 称为连续点，否则就称 x_0 为间断点。

直观地说，就是当动点 x 趋于定点 x_0 时，若动点函数值趋于定点的函数值，则函数在 x_0 点连续。若 x_0 是连续点，则当自变量在 x_0 点有无限小的变化，引起因变量的变化也无限的小。

◆ 定理 1. Darboux 定理

设 $f(x) \in C^{(1)}[a,b]$。若 $f'(a) < f'(b)$，证明对任意 η，若 η 满足

$$f'(a) < \eta < f'(b), \tag{2}$$

则存在 $\xi \in (a,b)$，使得 $f'(\xi) = \eta$。

Proof. 不妨设 $f(x)$ 单调上升。那么对任意 $x_0 \in (a,b)$，当 $x \to x_0 - 0$ 时，函数值 $f(x)$ 上升，并有上界 $f(x_0)$，所以极限存在，且

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x) = f(x_0-0) \le f(x_0)$$

同理，当 $x \to x_0+0$ 时，函数值 $f(x)$ 下降，并有下界 $f(x_0)$，所以极限存在，且

$$\lim_{x\to x_0+0} f(x) = f(x_0+0) \ge f(x_0)$$

若 $f(x_0-0) = f(x_0+0)$，则 x_0 是函数的连续点；若 $f(x_0-0) \ne f(x_0+0)$，则 x_0 是函数的第一类间断点。由于 x_0 的任意性，所以区间上每一点不是连续点就是第一类间断点。 □

◆ 命题 1

设给定实数 x_1, x_2，且 $x_1 < x_2$，总可以找到有理数 q_1, q_2，使得

$$x_1 < q_1 < q_2 < x_2,$$

因此

$$a^{x_1} = \sup_{q\le x_1}\{a^q\} \le a^{q_1} < a^{q_2} \le \sup_{q\le x_2}\{a^q\} = a^{x_2},$$

即 a^x 在 $\mathbb{R}$ 上严格上升。

♦ 引理 1.2

设 $a>1$，n 为正整数，则存在实数 $b>1$，使得 $a=b^n$ 或者 $\sqrt[n]{a}=b$。