

# 第九届中国大学生数学竞赛预赛试卷

(数学类, 2017 年 10 月 28 日)

绝密 ★ 启用前

(14 金融工程 - 白兔兔)

考试形式: 闭卷 考试时间: 150 分钟 满分: 100 分

题号	一	二	三	四	五	六	总分
满分	15	15	15	20	15	20	100
得分							

注意: 1. 所有答题都须写在试卷密封线右边, 写在其他纸上一律无效.

2. 密封线左边请勿答题, 密封线外不得有姓名及相关标记.

3. 如答题空白不够, 可写在当页背面, 并标明题号.

得分	
阅卷人	

一、(本题 15 分) 在空间直角坐标系中, 设单叶双曲面  $\Gamma$  的方程为  $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ , 设  $P$  为空间的平面, 它交  $\Gamma$  于一抛物线  $C$ . 求该平面的法线与  $z$ -轴的夹角.

省 市 学 校 准 考 证 号 姓 名 考 场 号 座 位 号

答题时不要超过此线

密封线

得分	
阅卷人	

二、(本题 15 分) 设  $\{a_n\}$  是递增数列,  $a_1 > 1$ . 求证: 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{a_n \ln a_{n+1}}$  收敛的充分必要条件是  $\{a_n\}$  有界, 又问级数通项分母中的  $a_n$  能否换成  $a_{n+1}$ ?

省市\_\_\_\_\_学校\_\_\_\_\_准考证号\_\_\_\_\_姓名\_\_\_\_\_考场号\_\_\_\_\_座位号\_\_\_\_\_

答题时不要超过此线

密封线

得分	
阅卷人	

三、(本题 15 分) 设  $\Gamma = \{W_1, W_2, \dots, W_r\}$  为  $r$  个各不相同的可逆  $n$  阶复方阵构成的集合. 若该集合关于矩阵乘法封闭 (即,  $\forall M, N \in \Gamma$ , 有  $MN \in \Gamma$ ), 证明:  $\sum_{i=1}^r W_i = 0$  当且仅当  $\sum_{i=1}^r \text{tr}(W_i) = 0$ , 其中  $\text{tr}(W_i)$  表示  $W_i$  的迹

得 分	
阅卷人	

四、(本题 20 分) 给定非零实数  $a$  及实  $n$  阶反对称矩阵  $A$  (即,  $A$  的转置  $A^T$  等于  $-A$ ), 记矩阵有序对集合  $T$  为

$$T = \{(X, Y) | X \in \mathbb{R}^{n \times n}, Y \in \mathbb{R}^{n \times n}, XY = aI + A\},$$

其中  $I$  为  $n$  阶单位阵,  $\mathbb{R}^{n \times n}$  为所有实  $n$  阶方阵构成的集合. 证明: 任取  $T$  中两元:  $(X, Y)$  和  $(M, N)$  必有  $XN + Y^T M^T \neq 0$

省市\_\_\_\_\_学校\_\_\_\_\_准考证号\_\_\_\_\_姓名\_\_\_\_\_考场号\_\_\_\_\_座位号\_\_\_\_\_



得分	
阅卷人	

存在, 求  $A, B$

五、(本题 15 分) 设  $f(x) = \arctan x$ ,  $A$  为常数. 若

$$B = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) - An \right)$$

得分	
阅卷人	

六、(本题 20 分) 设  $f(x) = 1 - x^2 + x^3$  ( $x \in [0, 1]$ ),  
计算以下极限并说明理由

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\int_0^1 f^n(x) \ln(x+2) dx}{\int_0^1 f^n(x) dx}$$