衡阳师范学院 2018-2019 学年第二学期
化学与材料科学学院化学专业 2018 级
《高等数学（下）》期末考试试题 A 卷
参考答案及评分标准

考核类型: 闭卷　　考试时量：120 分钟

题号	一	二	三	四	总分	合分人	复查人
总分	15	15	10	60	100		
得分							

学　院
专　业
班　级
学　号
姓　名

得分	评阅人

一、选择题 (每小题 3 分，共 15 分)

1. 求初值问题 $y' = y, y(0) = 1$ 的特解为 $y =$ (　　)

   A. $e^x + 1$　B. $\frac{1}{2}x^2 + 1$　C. $x^2 + C$, 其中 C 为任意常数　**D.** e^x

2. 求初值问题 $y' = y, y(0) = 1$ 的特解为 $y =$ (　　)

   A. $e^x + 1$　B. $\frac{1}{2}x^2 + 1$　C. $x^2 + C$, 其中 C 为任意常数　**D.** e^x

3. 求初值问题 $y' = y, y(0) = 1$ 的特解为 $y =$ (　　)

   A. $e^x + 1$　B. $\frac{1}{2}x^2 + 1$　C. $x^2 + C$, 其中 C 为任意常数　**D.** e^x

4. 求初值问题 $y' = y, y(0) = 1$ 的特解为 $y =$ (　　)

   A. $e^x + 1$　B. $\frac{1}{2}x^2 + 1$　C. $x^2 + C$, 其中 C 为任意常数　**D.** e^x

5. 求初值问题 $y' = y, y(0) = 1$ 的特解为 $y =$ (　　)

   A. $e^x + 1$　B. $\frac{1}{2}x^2 + 1$　C. $x^2 + C$, 其中 C 为任意常数　**D.** e^x

得分	评阅人

二、填空题 (每小题 3 分，共 15 分)

6. 求椭圆 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 2$ 在点 $(-2, 1)$ 处的切线方程 $\underline{\quad x - 2y + 4 = 0 \quad}$.

7. 求椭圆 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 2$ 在点 $(-2, 1)$ 处的切线方程 $\underline{\qquad x - 2y + 4 = 0 \qquad}$.

8. 求椭圆 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 2$ 在点 $(-2, 1)$ 处的切线方程 $\underline{\qquad x - 2y + 4 = 0 \qquad}$.

9. 求椭圆 $\frac{x^2}{4}+y^2=2$ 在点 $(-2,1)$ 处的切线方程 $\underline{\qquad x-2y+4=0\qquad}$.

10. 求椭圆 $\frac{x^2}{4}+y^2=2$ 在点 $(-2,1)$ 处的切线方程 $\underline{\qquad x-2y+4=0\qquad}$.

得分	评阅人

三、判断题 (每小题 2 分，共 10 分)

11. 若二元函数 $f(x,y)$ 在点 $(1,1)$ 处连续，则其在该点处可微。 $\underline{\times}$

12. 如果常数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 那么 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$。 $\underline{\checkmark}$

13. 若二元函数 $f(x,y)$ 在点 $(1,1)$ 处连续，则其在该点处可微。 $\underline{\times}$

14. 如果常数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 那么 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$。 $\underline{\checkmark}$

15. 如果常数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 那么 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$。 $\underline{\checkmark}$

得分	评阅人

四、解答题 (每小题 10 分，共 60 分)

16. 试将微分方程 $x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=x^2+3y,\ x>0$ 转换成一阶非齐次线性微分方程的标准形式，然后使用常数变易法求解，最后对求得的结果进行验算。

解: 一阶非齐次线性微分方程的标准形式为: $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\frac{-3}{x}y=x$. ⋯⋯ 2 分

先解其对应的齐次线性微分方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\frac{-3}{x}y=0$. 得：$y=cx^3$, 其中 c 为任意的实常数。⋯⋯ 5 分

使用常数变易法将常数 c 替换成与 x 相关的函数 $c(x)$ 代入原微分方程解得: $\frac{\mathrm{d}c(x)}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{x^2}$, 即 $c(x)=-\frac{1}{x}+C$, 其中 C 为任意常数。故原微分方程的通解为:

$$y=Cx^3-x^2, x>0 \quad \text{其中}C\text{为任意常数。}$$ ⋯⋯ 8 分

检验：代入原微分方程，左边为 $x(3Cx^2-2x)=3Cx^3-2x^2$, 右边为 $x^2+3Cx^3-3x^2=3Cx^3-2x^2$. 验算可得结果正确。⋯⋯ 10 分

17. 试求出不共线三点 $P(1,-1,0), Q(2,1,-1), R(-1,1,2)$ 所确定的平面的单位法向量。

解: 设该平面的法向量为 $\vec{n}$, 则 $\vec{n} = \vec{PQ} \times \vec{PR} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = (6,0,6)$.2+5 分

故其单位法向量为 $\pm\frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1,0,1)$.……10 分

18. 试求出不共线三点 $P(1,-1,0), Q(2,1,-1), R(-1,1,2)$ 所确定的平面的单位法向量。

解: 设该平面的法向量为 $\vec{n}$, 则 $\vec{n} = \vec{PQ} \times \vec{PR} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = (6,0,6)$.2+5 分

故其单位法向量为 $\pm\frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1,0,1)$.……10 分

19. 试求出不共线三点 $P(1,-1,0), Q(2,1,-1), R(-1,1,2)$ 所确定的平面的单位法向量。

解: 设该平面的法向量为 $\vec{n}$, 则 $\vec{n} = \vec{PQ} \times \vec{PR} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = (6,0,6)$.2+5 分

故其单位法向量为 $\pm\frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1,0,1)$.……10 分

20. 求函数 $f(x,y)=x+y$ 在 $g(x,y)=x^2+y^2=1$ 限制下的条件最大值与最小值。(提示：可以使用拉格朗日乘数法。)

解: 注：此题也可以不使用乘数法。小题可以看几何意义，大题可以用三角函数代换。另外也可以使用从限制条件中解出 y 代入 f 来解无条件极值。

设 $L(x,y,\lambda)=f(x,y)-\lambda[g(x,y)-1]$ 由 $\begin{cases}\frac{\partial L}{\partial x}=1-2\lambda x=0\\ \frac{\partial L}{\partial x}=1-2\lambda y=0\\ \frac{\partial L}{\partial \lambda}=x^2+y^2-1=0\end{cases}$ ……………4 分

由前两式相减得 $x=y$ 或者 $\lambda=0$(舍去)。……………5 分

将 $x=y$ 代入最后一式得 $x^2=\frac{1}{2}$, 所以 $x=y=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 或者 $x=y=-\frac{\sqrt{2}}{2}$.……7 分

于是 f 的条件极值为 $f(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})=\sqrt{2}, f(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2})=-\sqrt{2}$.……………9 分

综上所述，f 的最大值为 $\sqrt{2}$, 最小值为 $-\sqrt{2}$.……………10 分

21. 试求出不共线三点 $P(1,-1,0),Q(2,1,-1),R(-1,1,2)$ 所确定的平面的单位法向量。

解: 设该平面的法向量为 $\vec{n}$, 则 $\vec{n}=\vec{PQ}\times\vec{PR}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\1&2&-1\\-2&2&2\end{vmatrix}=(6,0,6)$.2+5 分

故其单位法向量为 $\pm\frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1,0,1)$.……………10 分